

Інститут космічних досліджень
Національна академія наук України
Державне космічне агентство України

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ІВАНОВ СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 517.911

ДИСЕРТАЦІЯ

**АНАЛІЗ ЛОКАЛЬНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДИНАМІКИ АВТОНОМНИХ
СИСТЕМ НА КОМПАКТНОМУ ГЛАДКОМУ МНОГОВИДІ**

01.05.04 Системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник **Яценко Віталій Олексійович**, доктор технічних наук,
професор

Київ – 2019

АНОТАЦІЯ

Іванов С.М. Аналіз локальних властивостей динаміки автономних систем на компактному гладкому многовиді. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 «Системний аналіз і теорія оптимальних рішень». - Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» МОН України, Київ, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню актуальних проблем в області аналізу властивостей нелінійної динаміки автономних систем на компактному гладкому многовиді та розробці методів розв'язання задач локальної структурної стійкості, обчислення фрактальної розмірності Каплана-Йоркі, локальних експонент Ляпунова, розв'язанню задач знаходження умов локальної дифеоморфності автономних систем на компактному гладкому многовиді, виведенню функції динаміки норм дотичних векторів автономних систем, які задовольняють умовам Гробмана-Гартмана, а також дослідженню умов рівності розмірності Каплана-Йоркі для дифеоморфних, топологічно та орбітально топологічно еквівалентних автономних динамічних систем, отриманню динамічних характеристик векторного поля та аналізу і математичному обґрунтуванню методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом однієї змінної автономної системи. Важливість та значущість представлених задач визначає актуальність дисертації.

При дослідженні математичних моделей автономних систем у механіці, фізиці, медицині, біології, техніці, економіці, соціології тощо з широкого кола систем різних областей природознавства виникають задачі

аналізу нелінійної динаміки при автоматичному регулюванні, технічної кібернетики, перехідних процесів, автоколивальний рух, особливо так звана «хаотична» динаміка.

У даний час привертають увагу динамічні автономні системи на компактному гладкому многовиді, необхідність у вивченні яких виникла у механіці та, згодом, при моделюванні та прогнозуванні геомагнітних індексів. Найвідомішими прикладами таких систем є маятникова система, фазові криві якої належать деякому компактному гладкому многовиду, диференціальні рівняння на колі, сфері (В.І. Арнольд та ін.), торі (А. Пуанкаре, А. Данжуа) та багато інших. Однією з основних задач аналізу динаміки цих систем є дослідження структурної стійкості (робастності, грубості), а отже і еквівалентності (дифеоморфності, топологічної еквівалентності, орбітальної топологічної еквівалентності).

Наведений огляд літератури, присвяченої дослідженню та виявленню локальних властивостей динаміки. Обговорюються задачі з початку зародження загальної теорії систем. Описується необхідність і значимість системного аналізу динамічних явищ і процесів у різних областях природознавства. Значна увага приділяється саме автономним системам та загальному вигляду математичних моделей. Зазначається, що при відомих початкових умовах динамічний процес за автономною системою вважається повністю визначеним. Автономні динамічні системи на компактному гладкому многовиді дуже поширені у різних прикладних областях. Стверджується, що деякий многовид локально є гомеоморфним деякій області евклідового простору на основі означення метричного простору. Тому, локально, така автономна система на компактному гладкому многовиді не відрізняється від такої ж системи в евклідовому просторі.

Обговорюється зміст системи у даній роботі. Під терміном «система» розуміються автономні динамічні системи звичайних диференціальних

рівнянь на компактному гладкому многовиді, класу гладкості C^2 , якщо не сказано інше. Для виявлення наявних властивостей динаміки досліджуваних процесів застосовується виявлення цих властивостей при дослідженні формалізованої математичної моделі.

Стверджується, що модель реальної системи надає наближене уявлення щодо динаміки процесу, оскільки при побудові математичної моделі завжди проводиться часткове спрощення поведінки системи і, як наслідок, параметри визначаються наближено. Тому властивості та динаміка реальних процесів не завжди відповідає характеристикам змодельованої системи. Виявлення таких умов, за яких результати аналізу можна застосувати при дослідженні реальних процесів модельної системи, є необхідною складовою якісного системного аналізу. Описується вперше поставлена задача грубості А. А. Андроновим та Л. С. Понтрягіним. Сутність введеного поняття полягає в тому, що «мале» збурення грубої системи переводить її в орбітально топологічно еквівалентну систему, які зараз розглядаються в області теорії структурної стійкості. Зазначено, що у теорії структурної стійкості розглядаються системи диференціальних рівнянь саме на многовидах. Якщо многовид є компактным, то розв'язки системи продовжуються необмежено. Надається акуратне означення многовиду та їх приклади. Описується, що множина векторів, які є дотичними до компактного гладкого многовиду у деякій точці, мають структуру лінійного простору, який називається дотичним простором, причому його розмірність приймається рівною розмірності многовиду.

Детально описується сутність грубої або структурно стійкої системи маятника на компактному гладкому многовиді, а також сенс «малого» збурення. Розглядається класифікаційний підхід до поняття еквівалентності систем. Наводяться деякі означення видів еквівалентності систем. Наводиться теорема Гробмана-Гартмана про еквівалентність деякої автономної системи своїй лінійній частині.

Розглядаються гіперболічні системи, умови їх локальної дифеоморфності без нуля та з нулем серед власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі точки положення рівноваги. Описується виявлення ентропії для нормованого вектора норм дотичних векторів автономних систем. Цей вектор задовольняє виведеному функціоналу у вигляді лагранжіана, який представляє собою максимізацію суми згаданої ентропії, функції експоненціальної дивергенції (конвергенції), початкових умов і нормування (вектору норм дотичних векторів) для кожного моменту часу t . Показано, що виведений функціонал відповідає принципу максимуму (максимальної невизначеності), який також можна розглядати як поширення принципу недостатньої підстави Бернуллі-Лапласа. Доводиться відповідна теорема.

Наводиться означення згаданої ентропії та середньої ентропії. Середня ентропія є границею для автономної системи з постійним векторним полем. Динамічні системи, які описуються диференціальними рівняннями на d -вимірному компактному гладкому многовиді локально не відрізняються від диференціальних рівнянь на \mathbb{R}^d . У якості норми використовується евклідова норма.

Якщо функція дивергенції прямує до середнього темпу експоненціальної дивергенції (конвергенції), помноженої на час t , тобто до експонент Ляпунова, помножених на час t , а за означенням, експоненти Ляпунова представляють собою середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції), то середня ентропія має границю при $t \rightarrow \infty$, яка дорівнює нулю. Доводиться відповідна теорема. Сама середня ентропія, в інших випадках, має границю при $t \rightarrow \infty$. Якщо середня ентропія досягає максимуму, тоді розмірність Каплана-Йоркі прямує до ємності для динамічної системи на площині, а також має такі властивості нелінійних точок положення рівноваги як дикритичний (скалярна матриця) або вироджений вузол (жорданова клітка). У іншому випадку, тобто коли

ентропія менше максимальної, такий фазовий портрет неможливий. Отже, врахувавши можливу зміну структури системи геомагнітних індексів, зростання ентропії задає напрямок на можливу зміну типу фазового портрету.

Описується виявлення властивостей динаміки системи, локальної структурної стійкості, а саме локальної дифеоморфності динамічних систем на компактному гладкому многовиді, які описуються звичайними диференціальними рівняннями (автономними системами), а також дослідження їх фрактальної розмірності Каплана-Йоркі в тому числі для реконструйованих систем за Такенсом. Приділяється увага розмірності Каплана-Йоркі або ляпуновській розмірності для автономних систем та досліджено її рівність в дифеоморфних (топологічно та орбітально топологічно еквівалентних) системах. Підтверджується доведення Фармера та ін., що ляпуновська розмірність дорівнює інформаційній розмірності. Наводиться опис розмірності Каплана-Йоркі та її взаємозв'язок з іншими розмірностями.

Коли досліджувана система двовимірною, то вона може мати точки положення рівноваги тільки наступних типів: центр, вузол, фокус і сідло. Коли фазовий простір d , більшої розмірності, при $d > 2$, число типів таких точок вже більше і вони мають поєднувати в собі властивості наведених вище типів. Відмічається, що доцільніше розбивати на підпростори зі стійкими точками або нестійкими певного типу. У дифеоморфних динамічних систем розмірність Каплана-Йоркі співпадає.

Розглядаються теореми Такенса про вкладення для дискретного $t \in \mathbb{N}$ та неперервного часу $t \in \mathbb{R}$. Приводиться оцінка часу затримки за допомогою автокореляційної функції для часового ряду однієї змінної відомих систем Лоренца, Ресслера та відображення Енона. Описується розмірність Грасбергера-Прокаччі та її застосування до оцінювання розмірності вкладень. Пояснюється зміст розмірності Грасбергера-

Прокаччі, кореляційного інтеграла. Через декомпозицію експонент Ляпунова виводиться показник виявлення постійності або змінності векторного поля автономної динамічної системи. Розглядається впорядкування декомпозиційних границь. Наводиться чисельний алгоритм для обчислення цих границь за часовим рядом та граничної ентропії.

Обґрунтовано алгоритм оцінювання локальної матриці Якобі та обчислення експонент Ляпунова. Проводиться аналіз і обчислення експонент Ляпунова, розмірності та граничної ентропії для геомагнітних індексів Dst, Kp, AE, які мають ознаки гіперхаотичної динаміки.

Ключові слова: дифеоморфізм, локально дифеоморфні системи, топологічна еквівалентність, компактний гладкий многовид, динамічна система, звичайні диференціальні рівняння, автономна система, розмірність Каплана-Йоркі.

ABSTRACT

Ivanov Serhii Mykolaiovych. Analysis of local properties of dynamics of autonomous systems on a compact smooth manifold. - Manuscript.

The thesis for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the specialty 01.05.04 – Systems Analysis and Optimal Decisions Theory. - Space Research Institute of the NAS of Ukraine and SSA of Ukraine, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», MES of Ukraine, Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to the research of actual problems in the field of the analysis of the properties of nonlinear dynamics of autonomous systems on a compact smooth manifold and the development of the methods for solving problems of local structural stability, calculation of Kaplan-Yorke dimension, calculation of local Lyapunov exponents, the derivation of the function of dynamics of norms of tangent vectors of autonomous systems that satisfy the Grobman-Hartmann conditions, the study of the conditions of the equality of the Kaplan-Yorke dimension for diffeomorphic systems and topologically equivalent systems, and topologically orbitally equivalent autonomous dynamical systems, obtaining dynamic characteristics of a vector field, and mathematical substantiation of the calculation of the Lyapunov exponents from a time series. The importance and the significance of the presented tasks determines the actual topic.

In the study of mathematical models of autonomous systems in mechanics, physics, medicine, biology, technology, economics, sociology, etc. from a wide range of systems of various fields of science the problems of analysis of nonlinear dynamics arises in automatic control, technical cybernetics, transients, self-oscillatory motion, especially "chaotic" dynamics.

Much attention is given to the research the dynamic autonomous systems

on compact smooth manifolds. The most famous examples of such systems are the pendulum system, whose phase curves belong to some compact smooth manifold, differential equations on a circle, sphere (V.I. Arnold, etc.), torus (A. Poincare, A. Denjoy) and many others. One of the main tasks of the analysis of these systems is the study of structural stability (robustness), and equivalence (diffeomorphic systems, topological equivalence, topologically orbitally equivalent systems).

The review of the literature on the study and detection of local properties of dynamics of the systems is given. The problems from general systems theory are discussed. The necessity of analysis of dynamic phenomena and processes in different fields of natural science are described. Much attention is given to autonomous systems and the general appearance of mathematical models. It is noted that the dynamic process of an autonomous system is fully defined under known initial conditions. Autonomous dynamic systems on a compact smooth manifold are very common in various application areas. It is claimed that some manifold is locally homeomorphic to some region of Euclidean space based on the definition of metric space. Therefore, locally, such an autonomous system on a compact smooth manifold does not differ from the same system in Euclidean space.

The content of the system is discussed. The term “system” refers to autonomous dynamic systems of ordinary differential equations on a compact smooth manifold. Formalized mathematical model is used to identify the existing properties of the dynamics of the studied processes.

It is claimed that the mathematical model provides an approximate idea of the dynamics of the real process. Therefore, the properties of dynamics of real processes do not always correspond to the characteristics of the modeled system. Detecting such properties is a necessary component of qualitative system analysis. For the first time the problem of system robustness was described by A.A. Andronov and L.S. Pontryagin. In the theory of system robustness the

differential equations on manifolds are considered. A neat definition of the manifold and their examples are given. It is described that the set of vectors that are tangent to a compact smooth manifold at some point have the structure of a linear space called the tangent space.

It is described in detail about robustness of systems on a compact smooth manifold. The classification approach to the concept of equivalence of the systems is considered. Some definitions of systems equivalence are given. The Grobman-Hartmann theorem on the equivalence of some autonomous system to its linear part is given.

Locally diffeomorphic hyperbolic systems are considered. The entropy for the vector of norms of tangent vectors of autonomous systems is described. This vector satisfies the Lagrangian functional which represents the maximization of the sum of the mentioned entropy, the function of exponential divergence (convergence), initial conditions and normalization (norms of tangent vectors) for each moment of time. It is shown that the deduced functional conforms to the principle of maximum (maximum uncertainty, the Bernoulli-Laplace principle).

The definition of mentioned entropy and average entropy is given. Dynamic systems described by differential equations on a d -measurable compact smooth manifold are not locally different from differential equations on \mathbb{R}^d . The Euclidean norm is used.

When directing the divergence function to the average exponential divergence rate (convergence) multiplied by time t , that is, to Lyapunov exponents multiplied by time t , and by definition, Lyapunov exponents represent the average exponential divergence rate (convergence), then average entropy (at $t \rightarrow \infty$) is zero. The corresponding theorem is proved. The average entropy, in other cases, has a limit at $t \rightarrow \infty$.

When directing the average entropy to maximum, then the Kaplan-Yorke dimension directs to the capacity for the dynamic system on the plane, and also

has the properties of nonlinear stable equilibrium points such as a scalar matrix or degenerate node (Jordan cage).

Otherwise, that is, when entropy is less than maximum, such a phase portrait is impossible. Thus, the possible change in the structure of the geomagnetic indices system is detected by the increase of the average entropy. That is the direction for a possible change in the type of phase portrait.

When the system under study is two-dimensional, it can have stable equilibrium points only of the following types: center, node, focus, and saddle.

When the phase space of larger dimension and the number of types of such points is already greater, and they should combine the properties of the above types. It is noted that it is advisable to break into subspaces with stable points or unstable of a certain type. In diffeomorphic dynamical systems the Kaplan-Yorke dimension is the same.

Takens's theorems on embedding for discrete t and continuous time t are considered. The delay time as example is estimated using an autocorrelation function for the time series of one variable of the known Lorentz, Ressler systems, and Henon map. The Grassberger-Procaccia dimension and its application to estimating the size of embedding is described. The content of the Grassberger-Procaccia dimension, the correlation integral, is explained. The Lyapunov exponents decomposition shows the detection of the variability of the vector field of the autonomous dynamic system. The ordering of decomposition limits is considered. A numerical algorithm is provided to calculate these limits by time series and average entropy.

An algorithm for estimating the local Jacobian matrix and calculating Lyapunov exponents is substantiated.

The analysis and calculation of the Lyapunov exponents, the dimensions, and average entropy for geomagnetic indices Dst, Kp, and AE is given. It is noted that these geomagnetic indices have signs of hyperchaotic dynamics.

Keywords: diffeomorphism, locally diffeomorphic systems, topological equivalence, compact smooth manifold, dynamic system, autonomous system, ordinary differential equations, Kaplan-Yorke dimension.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Статті у наукових фахових виданнях

1. Іванов С.М., Яценко В.О. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* 2016. № 3. С. 65-68.
2. Іванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2017. №. 4. С. 83-86.
3. Іванов С. Н., Яценко В. А. Вычисление размерности по Ляпунову и применение для прогнозирования геомагнитных индексов. *Міжнар. наук.-техніч. жур. «Системні дослідження та інформаційні технології».* 2018. №3. С.122-132. doi: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.11>
4. Іванов С.М., Яценко В.О. Виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2018. №. 2. С. 67-70.
5. Yatsenko V.O., Ivanov S.M., Parnowski A., Vlasov D. Guaranteed NARMAX model for the prediction of geomagnetic Dst index. *Journal of Physical Studies.* 2019. Vol. 23. No. 1. pp. 1901-1 – 1901-5. doi: <https://doi.org/10.30970/jps.23.1901>

Статті в інших наукових виданнях

6. Наливайчук М.В., Тарасенко В.П., Іванов С.М., Яценко В.О. Алгоритмічне та програмне забезпечення адаптивного надпровідного гравіметра. *Комп'ютерно – інтегровані технології: освіта, наука, виробництво.* 2015. № 19. С. 121 – 128.

Тези та матеріали наукових конференцій

7. Ivanov S.M. Signal processing in cryogenic-optical gravimeter. *GEO-UA: Proc. of the 4rd International Conference*. (Kyiv, 26-30 May 2014). Kyiv, 2014. pp. 41-42.

8. Наливайчук М.В., Іванов С.М., Шолохов О.В., Яценко В.О. Алгоритмічне та математичне забезпечення супутникового адаптивного надпровідного гравіметра. *14-та конференція з космічних досліджень: матер.* (Ужгород, 8-12 вересня 2014). Ужгород, 2014. С. 99.

9. Макаричев М.В., Іванов С.М., Яценко В.О. Хаотична динаміка керованої ґратки та моделювання показників Ляпунова. *Четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: матер. тез доповідей*. (Київ, 23-25 квітня 2015). Київ, 2015. С. 21.

10. Іванов С.М., Макаричев М.В. Адаптивне керування білінійною динамікою чутливої маси надпровідного гравіметра. *15-та українська конференція з космічних досліджень: матер.* (Одеса, 24-28 серпня 2015). Одеса, 2015. С.143.

11. Яценко В.О., Іванов С.М., Макаричев М.В. Аналіз динаміки Кр-індексу для підтримки прийняття рішень з попередження бур. *Теорія прийняття рішень: міжнар. школа-семінар*, (Ужгород, 26 вересня - 1 жовт. 2016). Ужгород, 2016. С. 277 - 278.

12. Іванов С.М., Яценко В.О. Оцінювання спектру показників Ляпунова за хаотичним часовим рядом з шумом. *Інформаційні технології та взаємодії: праці III міжнар. наук. - практич. конфер.* (Київ, 8 - 10 лист. 2016). Київ, 2016. С. 35.

13. Іванов С.М. Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем. *Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf.* (Kyiv, 24-26 May 2017). Kyiv, 2017. P. 87.

14. Ivanov S. The investigating of geomagnetic indices (DST, KP, AE): correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction. 17-th Ukrainian conference on space research: proc. (Odesa, 21-25 August 2017). Odesa, 2017. P. 18.
15. Ivanov S.M. Comparison of NARMAX, Artificial neural network, and Localized Lyapunov exponents for geomagnetic indices prediction. *Fourth UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science*: proc. (Kyiv, 28 August –1 September, 2017). Kyiv, 2017. P. 69.
16. Ivanov S.M. Nonlinear discrete models Identification method for geomagnetic indices prediction. *Automation-2017*: proc. XXIV inter. conf. (Kyiv, 13-15 September 2017). Kyiv, 2017. P. 25.
17. Ivanov S.M. NARMAX network identification and space weather prediction. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*: матер. тез доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 13 – 15 грудня 2017). Київ, 2017. С. 68.
18. Іванов С.М., Яценко В.О. Необхідна і достатня умова локальної структурної стійкості динамічних систем на компактному гладкому многовиді. *Dynam. syst. modelling and stab. investig.*: inter. conf., (Kyiv, 22-24 May 2019). Kyiv, 2019. pp. 89-91.

ЗМІСТ

ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ.....	25
1.1. Огляд літератури	25
1.2. Основні результати дисертації	45
РОЗДІЛ 2. ЛОКАЛЬНА СТРУКТУРНА СТІЙКІСТЬ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	50
2.1. Вектор норм дотичних векторів у багатовимірному просторі.....	50
2.1.1. Постановка задачі	50
2.1.2. Функціонал динаміки норм дотичних векторів для автономних систем..	52
2.2. Виявлення локальної топологічної еквівалентності	59
2.2.1. Постановка задачі.	59
2.2.2. Доведення теореми локальної дифеоморфності.....	61
2.2.3. Інші властивості локальної дифеоморфності.....	64
2.3. Виявлення локальної орбітальної топологічної еквівалентності.....	65
2.4. Граничні за ентропією типи точок положення рівноваги на площині	68
2.4.1. Максимальне значення ентропії для базису з власних векторів	69
2.4.2. Максимальне значення ентропії для єдиного власного вектора.....	70
2.5. Багатовимірні простори.....	71
2.5.1. Точки положення рівноваги у багатовимірному просторі.	71
2.5.2. Точки положення рівноваги тривимірної системи.....	71
2.6. Припущення для випадків існування нуля серед власних значень ..	73
Висновки до розділу 2	77

РОЗДІЛ 3. РОЗМІРНІСТЬ КАПЛАНА-ЙОРКІ ТА ЛОКАЛЬНА ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ	79
3.1. Розмірність Каплана-Йоркі та її зв'язок з іншими розмірностями...	79
3.2. Рівність розмірності Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних динамічних систем	87
3.2.1. Постановка задачі	87
3.2.2. Доведення рівності розмірності Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних систем.....	87
3.3. Розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією та інших типів точок положення рівноваги на площині.....	90
3.4. Розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією та інших типів точок положення рівноваги у тривимірному просторі	95
Висновки до розділу 3	96
РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ЧАСОВИМИ РЯДАМИ.....	98
4.1. Оцінювання матриці Якобі за часовим рядом і обчислення експонент Ляпунова.....	99
4.2. Чисельне диференціювання за часовим рядом	104
4.3. Виявлення змінювання векторного поля динамічної системи за часовим рядом	111
4.3.1. Постановка задачі	111
4.3.2. Декомпозиція експонент Ляпунова.....	113
4.3.3. Обчислення декомпозиційних границь за часовим рядом... ..	115
4.4. Обчислення розмірності Каплана-Йоркі на прикладі геомагнітних індексів	117
Висновки до розділу 4	123
ВИСНОВКИ.....	126
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	128
ДОДАТОК А.....	139

ВСТУП

Актуальність теми. У даний час при дослідженні динамічних явищ і процесів у різних прикладних областях природознавства широко розповсюджено застосування математичних моделей у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь для розв'язання задач автоматичного регулювання, технічної кібернетики, в рамках яких вивчається вільний рух систем при дослідженні перехідних процесів, автоколивальний рух, «хаотична» динаміка тощо.

До класичних задач належить аналіз автономної системи Лоренца, яка знайшла застосування при формалізації процесів конвекції в тороїдальній або замкнутій петлі, обертання водяного колеса, дисипативного гармонійного осцилятора, одномодових лазерів. Інша задача пов'язана з дослідженням автономної системи Ресслера, яка застосовується для опису потоків рідини, різних хімічних реакцій і молекулярних процесів. Відомі задачі, в яких розглядається система Рікітакі, – для опису великих вихорів магнітних полів Землі, та система Гувера – для термостатичної динаміки та ін.

Особливу увагу привертають динамічні автономні системи на компактному гладкому многовиді, необхідність у вивченні яких виникла у механіці та, згодом, при моделюванні та прогнозуванні геомагнітних індексів. Серед найвідоміших прикладів таких систем є маятникова система, фазові криві якої належать деякому компактному гладкому многовиду, диференціальні рівняння на колі, сфері (В.І. Арнольд та ін.), торі (А. Пуанкаре, А. Данжуа) та багато інших. Однією з основних задач аналізу динаміки цих систем є дослідження структурної стійкості (робастності, грубості), а отже і еквівалентності (дифеоморфності, топологічної еквівалентності, орбітальної топологічної еквівалентності).

У 1956 р. В.В.Немицьким вперше була поставлена задача про визначення умов, за яких автономна система топологічно еквівалентна своїй лінійній частині. Д.М.Гробманом та Ф.Гартманом було представлено розв'язок задачі В.В.Немицького та встановлені умови топологічної еквівалентності лінійній частині системи. Однак необхідна і достатня умова локальної дифеоморфності, топологічної та орбітально топологічної еквівалентності динамічних автономних систем потребувала подальших досліджень не тільки на площині, а й у багатовимірному просторі.

Зростання уваги до теми дисертації обумовлене завдяки дослідженням, описаних у працях ряду українських та зарубіжних учених: Личака М.М., Кунцевича В. М., Панкратової Н.Д., Хусаїнова Д.Я., Наконечного О. Г., Івохіна Є.В., Яценка В. О., Турбіна А.Ф., Працьовитого М.В., Андропова О.О., Понтрягіна Л.С., Арнольда В.І., Гробмана Д. М., Данилова В.Я., Смейла С., Kaplan J., Yorke J., Farmer J.D., Mori H., Fredericson P., Ott E., Мун Ф., Sano M., Sawada Y., Renyi A., Hartman P., Shaw R., Grassberger P., Procaccia I., Takens F., Janes E., Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A., Eckmann J.-P., Rosenstein M.T., Benettin G. та ін.

Дисертаційна робота присвячена розв'язанню задач знаходження умов локальної (в околі точки положення рівноваги) дифеоморфності автономних систем на компактному гладкому многовиді, виведенню функції динаміки норм дотичних векторів автономних систем, які задовольняють умовам Гробмана-Гартмана, а також дослідженню умов рівності розмірності Каплана-Йоркі для автономних динамічних систем, отриманню динамічних характеристик векторного поля та аналізу і математичному обґрунтуванню методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом однієї змінної автономної системи. Важливість та значущість представлених задач визначає актуальність теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами та темами.

Дисертаційні дослідження виконувались у відділі «Дистанційних методів і перспективних приладів» Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України у межах пріоритетного напрямку розвитку науки і техніки «Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави», а також:

– за європейським проектом PROGRESS «Prediction of Geospace Radiation Environment and Solar wind parameters» у рамках програми HORIZON – 2020, GA#637302;

– за темою, яку було затверджено Президією НАН України «Розробити моделі фізико-хімічних та гідродинамічних процесів у космічному просторі та методи оброблення супутникових даних», номер Держреєстрації 0113U003019;

– для Українського центру космічної погоди.

Мета та завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є дослідження локальних властивостей динаміки нелінійних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Досягнення поставленої мети зумовило необхідність розв'язання таких *задач*:

- доведення тверджень щодо екстремальності ентропії нормованого вектора норм дотичних векторів для автономної системи та отримання екстремального функціоналу;

- визначення умов локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності (дифеоморфності) автономних систем та співвідношень щодо розмірності Каплана-Йоркі;

- математичне обґрунтування методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом однієї змінної автономної динамічної системи та обчислення їх за часовими рядами геомагнітних індексів.

Об'єкт дослідження – процеси, які описуються нелінійними автономними динамічними системами на компактному гладкому многовиді.

Предмет дослідження – локальні властивості динаміки нелінійних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі застосовуються методи: математичного та функціонального аналізу, теорії звичайних диференціальних рівнянь, матричної алгебри, теорії стійкості Ляпунова (перший і другий метод), методи структурної стійкості (грубості, робастності), теорія прийняття рішень в умовах невизначеності, чисельні методи оптимізації.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що у дисертаційній роботі *вперше*:

- отримано твердження щодо екстремальності ентропії нормованого вектора норм дотичних векторів для автономних систем, для яких виконуються умови Гробмана-Гартмана, та отримано екстремальний функціонал у вигляді лагранжіана;

- сформульовано умови локальної топологічної еквівалентності автономних систем на компактному гладкому многовиді та обґрунтовано рівність розмірності Каплана-Йоркі;

- запропоновано декомпозицію експонент Ляпунова для дослідження структури векторного поля нелінійних автономних систем;

удосконалено:

- метод оцінювання локальних експонент Ляпунова за часовими рядами.

набули подальшого розвитку:

- дослідження локальних характеристик автономних систем на основі екстремального функціоналу;
- знаходження умов локальної структурної стійкості негіперболічних автономних систем.

Практичне значення одержаних результатів полягає у математичному обґрунтуванні методу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом та способу отримання умов локальної дифеоморфності для нелінійних динамічних автономних систем на компактному гладкому многовиді.

Отримані в роботі результати можуть бути застосовані до широкого класу задач у різних прикладних галузях.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи, що виносяться до захисту, отримані автором самостійно. У публікаціях [1,3,4,12,18], виконаних у співавторстві з науковим керівником В.О. Яценко, особистий внесок здобувача полягав у виконанні всіх основних доведень, розрахунків та формулюванні висновків, а наукового керівника – у постановці задач, рекомендацій щодо вибору методів дослідження та проведення аналізу, вибору наукової літератури. Зокрема, у статті [5] здобувачу належить частина 3 – чисельні результати та висновки, де проведено порівняння нейромережі Елмана з NARMAX моделлю гарантованого прогнозування Dst індексу, а також виконано аналіз динамічних властивостей: розрахунок старшого показника Ляпунова для Dst індексу, наведені розрахунки горизонту прогнозу, обґрунтовано зсув за фазою модельних значень з реальними даними через «хаотичну» динаміку цього індексу, сформульовано висновки. У статтях, опублікованих з іншими співавторами, здобувачу належить: в [8] – з метою підвищення точності вимірювань супутникового гравіметра, обґрунтовано керування магнітного підвісу, динаміка якого описується білінійною системою, через керування показниками Ляпунова; у [9] – керування показниками

Ляпунова у ґратці зв'язаних осциляторів; в [6], [10] – обговорення результатів, в [11] – обговорення результатів та формулювання висновків.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень були представлені в Інституті космічних досліджень НАНУ-ДКАУ у відділі дистанційних методів та перспективних приладів на семінарі «Декомпозиція експонент Ляпунова і прогнозування космічної погоди» (голова семінару – Яценко В.О.), в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики на науковому міжкафедральному семінарі кафедри моделювання складних систем і кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» (керівники: Гаращенко Ф.Г., Наконечний О.Г.), в Інституті математики НАН України, а також на українських та міжнародних конференціях:

- «GEO-UA» (Kyiv, 2014 p.);
- «14-та конференція з космічних досліджень» (Ужгород, 2014 p.);
- «четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики» (Київ, 2015);
- «15-та українська конференція з космічних досліджень» (Одеса, 2015 p.);
- «Теорія прийняття рішень» (Ужгород, 2016 p.);
- «Інформаційні технології та взаємодії» (Київ, 2016);
- "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2017) (Київ, 2017 p.);
- «17 Ukrainian conference on space research» (Odesa, 2017);
- «IV UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science» (Kyiv, 2017);
- «Automation-2017» (Kyiv, 2017 p.);

- «Modern computer science» (Київ, 2017);
- "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2019) (Київ, 2019 р.).

Публікації. Основні результати роботи надруковано у 18 публікаціях загальним обсягом 3 д.а. (з яких 2,8 належать особисто автору), з яких 5 статей – у фахових наукових журналах, рекомендованих МОН України, 1 з яких входить до наукометричної бази SCOPUS, 1 стаття – в інших наукових виданнях та 12 у збірниках тез та праць конференцій.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел у кількості 101 найменування, містить 17 рисунків та 2 таблиці. Повний обсяг дисертації складає 140 сторінок, основна частина викладена на 109 стор.

Автор висловлює щирі подяки своєму науковому керівнику Яценку Віталію Олексійовичу за постановку розглянутих в дисертаційній роботі задач та особливу увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

1.1. Огляд літератури

У системному аналізі динамічних явищ і процесів у механіці, фізиці, медицині, біології, техніці та інших областях природознавства широко розповсюджено застосування систем звичайних диференціальних рівнянь. Особливої уваги привертають дослідження динамічних систем на компактному гладкому многовиді, необхідність у вивченні яких виникла в задачах механіки [1] і поширилась у різних прикладних областях завдяки наявним багатьом математичним методам дослідження таких систем.

Необхідність і значимість проведення аналізу властивостей динамічних систем можна прослідкувати приблизно ще з 50-х років ХХ століття, коли почала зароджуватись загальна теорія систем. Сам термін «система» донині не має єдиного означення, але серед багатьох трактувань на центральне місце виходить поняття цілісності «системи», як «цілісного комплексу взаємозв'язаних елементів», яка «має певну структуру і взаємодіє з якимсь середовищем» [Енциклопедія кібернетики / В.М. Глушков та ін. Київ: голов. редакц. УРЕ, 1973. Т. 2. 572 с.]. Відповідно до сутності даного терміна, дійсно, можна давати означення, у залежності від прийнятої математичної моделі реальної системи. При прийнятті певного абстрагування можуть прийматися скільки завгодно математичних моделей, а отже «немає й не може бути лише одного формулювання» для терміна «система», бо означення «цього терміна залежно від прийнятого рівня абстрагування є різним» [Енциклопедія кібернетики / В.М. Глушков та ін. Київ: голов. редакц. УРЕ, 1973. Т. 2. 572 с.]. Наявний ізоморфізм динамічних процесів у механіці, фізиці, медицині,

біології, техніці, економіці, соціології тощо з широкого кола систем різних областей природознавства дозволяє поширити знайдені властивості з однієї області на іншу. Тому цілком природним є широка розповсюдженість застосування автономних систем звичайних диференціальних рівнянь як прийнятої математичної моделі реальної системи в різних областях природознавства, хоча і не обмежується лише тільки ними.

У задачах теорії автоматичного регулювання, технічної кібернетики, де вивчається вільний рух систем при дослідженні перехідних процесів, автоколивань, «хаотичної» динаміки тощо дуже поширено розглядаються саме автономні системи.

Автономна система – це динамічна система звичайних диференціальних рівнянь з постійними параметрами без зовнішніх впливів, яка записується у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_d),$$

$$x_i(t_0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, d},$$

$$t \geq t_0.$$

Якщо відомі початкові умови x_i^0 , то процес за цим диференціальним рівнянням вважається повністю визначеним.

Автономні динамічні системи на компактному гладкому многовиді дуже поширені у різних прикладних областях. Нехай f є вектор-функція принаймні класу гладкості C^2 , $x \in M$, $\dim(M) \geq 2$.

Многовид M локально є гомеоморфним деякій області евклідового

простору \mathbb{R}^d , на основі означення метричного простору. Тому, локально, така система на многовиді M не відрізняється від такої ж системи на \mathbb{R}^d .

Отже f є визначеною в деякій області $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, а f і $\partial f / \partial x$ - неперервні в G . Якщо система має нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$, тоді гарантується існування і єдиність розв'язку $x(t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах.

Під терміном «система» надалі будемо розуміти автономні системи звичайних диференціальних рівнянь на компактному гладкому многовиді, класу гладкості $C^{\sigma+1}$, якщо не сказано інше. Для виявлення наявних властивостей динаміки досліджуваних процесів будемо застосовувати виявлення цих властивостей при дослідженні формалізованої математичної моделі.

Зрозуміло, що модель реальної системи надає наближене уявлення щодо динаміки процесу, оскільки при побудові математичної моделі завжди проводиться часткове спрощення поведінки системи і, як наслідок, параметри визначаються наближено [2]. Тому властивості та динаміка реальних процесів не завжди відповідає характеристикам змодельованої системи. Виявлення таких умов, за яких результати аналізу можна застосувати при дослідженні реальних процесів модельної системи, є необхідною складовою якісного системного аналізу. Вперше ця задача була поставлена А. А. Андроновим та Л. С. Понтрягіним і сформульована в 1937 р. в статті [3], де було введено поняття грубості (грубої системи). Сутність введеного поняття полягає в тому, що мале збурення грубої системи переводить її в орбітально топологічно еквівалентну систему.

Зазвичай, у теорії структурної стійкості розглядаються системи диференціальних рівнянь на многовидах. Якщо многовид є компактным, то розв'язки системи продовжуються необмежено.

Під многовидом розуміється такий топологічний простір M , якщо

виконуються умови:

- M є хаусдорфовим простором, тобто є околиці без перетинання при будь-яких двох точках;
- M задовольняє другій аксіомі зліченості, тобто передбачається наявна злічена база;
- M локально є гомеоморфний деякій області евклідового простору \mathbb{R}^d .

Основними прикладами многовидів (рис. 1.1) є такі об'єкти:

- лінійний простір \mathbb{R}^d або будь-яка його відкрита підмножина (область D);
- сфера S^d , яка може бути задана таким рівнянням $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1$ у просторі \mathbb{R}^{d+1} ;
- тор $T^2 = S^1 \times S^1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = D_1, x_3^2 + x_4^2 = D_2\}$.

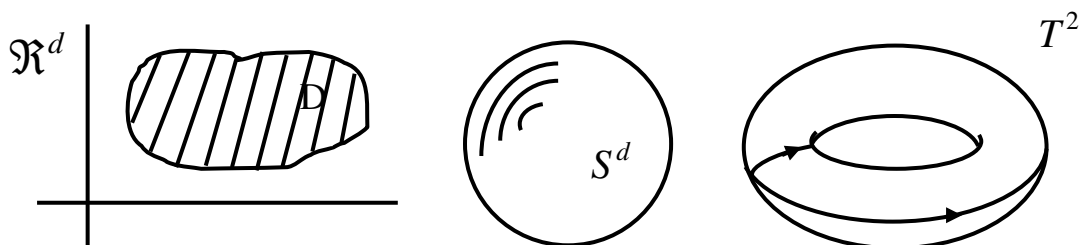


Рис.1.1. Приклади многовидів

Множина векторів, які є дотичними до многовиду M у точці x , мають структуру лінійного простору, який називається дотичним простором $T_x M$ (до многовиду M у точці x), причому його розмірність приймається рівною розмірності многовиду M .

Нехай об'єднання дотичних просторів до M в усіх його точках представляється формулою $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$. Тоді множина TM є гладким

многовидом M , а TM є дотичним розшаруванням многовиду M .

Автономна динамічна система $\dot{x} = f(x)$, $x \in M$, де $\dot{x} = dx/dt$, f - лінійна або нелінійна вектор-функція класу гладкості C^σ , $\sigma \geq 2$, M - компактний гладкий многовид ($f: M \rightarrow TM$, де TM - дотичне розшарування) буде грубою, або структурно стійкою, якщо знайдеться такий окіл Ω_f точки векторного поля f у просторі $C^\sigma(M, TM)$, що при кожній $f_a \in \Omega_f$ система $\dot{x} = f_a(x)$ буде орбітально топологічно еквівалентна системі $\dot{x} = f(x)$, а гомеоморфізм, який виконує цю еквівалентність близький до тотожного в топології простору $C^0(M, M)$.

Для розуміння сутності грубої або структурно стійкої системи, а також пояснення терміну «мале збурення», в [4] пропонується розглянути систему рівнянь маятника з коефіцієнтом тертя k :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

На рис. 1.2 стрілками показано елементи векторного поля (вектори швидкості). Якщо коефіцієнт тертя $k=0$, то маємо точку положення рівноваги типу центр (рис. 1.2, а), а фазові криві замкнені, а при $k > 0$ вони намотуються на точку положення рівноваги типу фокус (рис. 1.2, б).

Таким чином, навіть при невеликому відхиленні коефіцієнта тертя від нуля, якісно змінюється поведінка фазових кривих. Іншими словами, система маятника без тертя є структурно нестійкою системою, на відміну від системи з тертям, яка є структурно стійкою. Таким чином, локальні властивості системи можуть змінюватися при достатньо малій зміні величини векторного поля.

Для пояснення терміну «малої» зміни величини векторного поля розглянемо збурену систему маятника

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2 + \delta(x_2), \end{cases}$$

де $k > 0$, $\delta(x_2)$ - «мале» збурення.

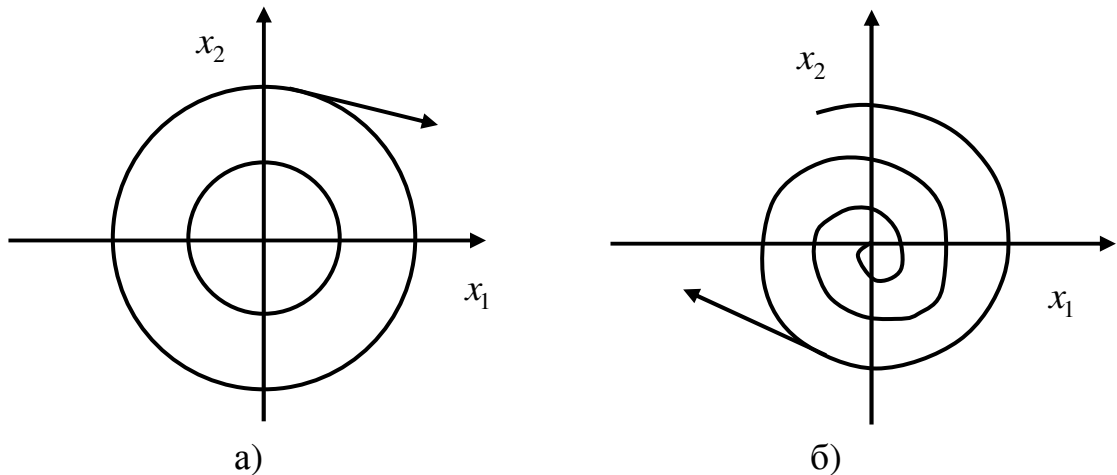


Рис. 1.2. Фазові портрети маятника:

а) маятник без тертя $k = 0$;

б) маятник з коефіцієнтом тертя $k = 1$.

Розглянемо окіл точки положення рівноваги $\Omega \in [-0.1; 0.1]$. Тоді «мале» збурення можна трактувати як вибір деякого $\varepsilon > 0$, вибір якого залежить від положення рівноваги незбуреної системи, для якого виконуються наступні умови: $|\delta(x_2)| < \varepsilon, x_2 \in \Omega; |\delta'(x_2)| < \varepsilon, x_2 \in \Omega$. Тобто $\delta(x_2)$ є малим в C^1 топології [3]. Тепер очевидно, що поведінка збуреної системи буде схожою з поведінкою незбуреної системи при $k > 0$ і заданій величині «малого» збурення. Розв'язання задачі щодо схожості поведінки двох систем зводиться до вирішення питань відношення еквівалентності систем.

В [5] розглядається класифікаційний підхід до поняття еквівалентності систем. Наведемо деякі означення, які будуть

застосовуватися.

Система (M_1, f_1) називається дифеоморфною системою (M_2, f_2) , якщо існує дифеоморфізм $h: M_1 \rightarrow M_2$, який переводить векторне поле f_1 у векторне поле f_2 . Зауважимо, якщо h - є лінійним гомеоморфізмом, тобто є дифеоморфізмом, то динамічні системи називають також лінійно диференційовано еквівалентними (дифеоморфними).

Системи називаються топологічно еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм фазового простору першої системи на фазовий простір другої, який переводить фазовий потік першої у фазовий потік другої.

Система (M_1, f_1) називається орбітально топологічно еквівалентною системою (M_2, f_2) , якщо існує гомеоморфізм фазового простору першої системи на фазовий простір другої, який переводить орієнтовані фазові криві першої в орієнтовані фазові криві другої системи.

Розглянемо прості стани положення рівноваги (прості точки положення рівноваги, означення яких наведено в [6]). Точка положення рівноваги векторного поля називається простою, якщо оператор, який визначається лінійною частиною векторного поля у цій точці є не виродженим. У роботі Д.М. Гробмана [7] було представлено розв'язок задачі В.В. Немицького, запропонованої в 1956 р., про визначення умов, за яких системи (1.1) і (1.2)

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x), \quad (1.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (1.2)$$

топологічно еквівалентні в околі простої точки положення рівноваги

(локально). У цих системах: $x, y, F(x)$ – n -вимірні вектори, A – постійна матриця порядку n .

Теорема 1.1. ([7], Д.М. Гробман) Якщо дійсні частини усіх власних значень матриці A відрізняються від нуля, $F(0) = 0$ і в якому-небудь околі G_1 точки $x = 0$ вектор $F(x)$ задовольняє умові Ліпшиця з достатньо малою константою L , то наведені вище системи гомеоморфні в областях G_1 і G_2 , де G_2 – це деяка область, яка містить точку $y = 0$.

У [7] також наводиться, що для виміру $n = 3$ ця задача була розв’язана Р.М. Мінцем в [8], а більш загальний розв’язок отриманий Е.М. Вайсбордом в [9]. У [10] наведено теорему, яка розв’язує цю задачу при частково послаблених обмеженнях на $F(x)$.

Для формулювання теореми Д.М. Гробмана, з урахуванням результатів Філіпа Гартмана [11] – [12], вводяться такі припущення:

- а) у матриці A немає власних значень з нульовою дійсною частиною;
- б) вектор $F(x)$ визначений і обмежений у просторі L^n : $|F(x)| \leq C$ для будь-якого x ;
- в) вектор $F(x)$ неперервний у просторі L^n і забезпечує єдиний розв’язок задачі Коші для наведеної вище системи (1.1).

Компоненти систем (1.1) і (1.2) $A, x, y, F(x)$ – можуть бути або дійсними, або комплексними.

Топологічне відображення деякої області G_1 простору L^n на деяку область $G_2 \subset L^n$, яке переводить розв’язок системи (1.1) з G_1 у розв’язок системи з (1.2) з G_2 і назад називається гомеоморфізмами Немицького [11]. Якщо гомеоморфізм Немицького $\Phi(x)$ має вигляд: $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, де $|\varphi(x)| < \text{const}$ для всіх $x \in G_1$ ($|\cdot|$ – евклідова норма вектора), то φ – обмежений зсув. Якщо ж зсув φ гомеоморфізму Немицького $\Phi(x)$ задовольняє нерівності $|\varphi(x)| \leq K_0 C$, де $K_0 > 0$ визначається матрицею A , а

$C = \sup_{x \in G_1} |F(x)| < \infty$, то $\Phi(x)$ називається гомеоморфізмом Андронова-Понтрягіна [11].

Теорема 1.2. ([13], Д.М. Гробман) Нехай виконані умови а), б), в) та задовольняється умова:

г) різниця будь-яких двох розв'язків системи (1.1) необмежена на вісі t .

Тоді:

- існує гомеоморфізм Андронова-Понтрягіна $\Phi(x)$ систем (1.1) та (1.2), який відображує L^n на себе;
- гомеоморфізм Андронова-Понтрягіна $\Phi(x)$ є єдиним у класі гомеоморфізмів Немицького систем (1.1) та (1.2) з обмеженим зсувом, а тому і в класі гомеоморфізмів Андронова-Понтрягіна;
- умова г) необхідна для існування гомеоморфізмів Немицького систем (1.1) та (1.2) з обмеженим зсувом;
- існує нескінченна множина гомеоморфізмів Немицького систем (1.1) та (1.2).

Розглянемо точки положення рівноваги таведемо означення топологічної і орбітально топологічної еквівалентностей двох систем в околі точки положення рівноваги, які наведені в [14] і справедливі як над полем дійсних, так і над полем комплексних чисел.

Однак необхідна і достатня умова локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності динамічних автономних систем потребувала подальших досліджень не тільки на площині, а й у багатовимірному просторі. У дисертаційній роботі представлені доведення необхідної і достатньої умови орбітально топологічної еквівалентності автономних систем лише при певному наявному дифеоморфізмі.

Системи називаються топологічно еквівалентними в околі точок положення рівноваги, якщо існує гомеоморфізм, який переводить точку

однієї системи в точку другої і сполучає локальні фазові потоки систем в околі цих точок.

Системи називаються орбітально топологічно еквівалентними в околі точок положення рівноваги, якщо існує гомеоморфізм деякого околу точки положення рівноваги векторного поля однієї системи в точку положення рівноваги другого і відображує локальні фазові криві одного векторного поля в інше зі збереженням напрямку руху.

Точка положення рівноваги системи називається гіперболічною, якщо жодне з власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі точки положення рівноваги не знаходиться на уявній вісі.

Зауважимо, що, локально, система диференціальних рівнянь на n -вимірному компактному гладкому многовиді не відрізняється від системи диференціальних рівнянь на \mathbb{R}^n .

Теорема 1.3. ([14], Д.М. Гробман і Ф. Гартман) C^1 гладке векторне поле з гіперболічною точкою положення рівноваги в деякому околі цієї точки топологічно еквівалентне своїй лінійній частині.

Теорема 1.4. ([14], для лінійних систем) Нехай лінійний оператор A з гіперболічною точкою положення рівноваги має n^+ власних значень у правій півплощині та n^- – в лівій. Тоді диференціальне рівняння $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n = n^+ + n^-$ топологічно еквівалентне стандартному $\dot{y} = y, \dot{z} = -z$, $y \in \mathbb{R}^{n^+}$, $z \in \mathbb{R}^{n^-}$.

Теорема 1.5. ([14], [15], Н.Н. Ладіс) Два лінійних диференціальних рівняння $\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n, \dot{y} = By, y \in \mathbb{R}^n$, топологічно еквівалентні, тоді і тільки тоді, коли власні значення з від'ємною (додатною) дійсною частиною операторів A та B рівні, а обмеження цих операторів на їх інваріантні підпростори, які відповідають уявним власним значенням, лінійно еквівалентні.

У [14] також наводиться зауваження, що топологічна класифікація

точок положення рівноваги лінійних систем, навіть якщо вони і не гіперболічні, співпадає з топологічною класифікацією лінійних систем у всьому просторі \mathcal{R}^n .

За умови принаймні C^2 класу гладкості векторного поля, існують дотичні вектори $r(x_0, t)$ в просторі дотичних на $x(t)$, еволюція яких подається рівнянням

$$\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t),$$

де $J = \partial f / \partial x$ - матриця Якобі для f .

Експоненти Ляпунова обчислюються за формулою

$$\lambda(x(0), r(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|},$$

де норма вектора позначена $\|r(t)\|$. На основі значень експонент Ляпунова можна дослідити різні властивості динаміки системи.

Однак, дуже часто нелінійні рівняння реальної системи є невідомими, а наявний лише часовий ряд однієї змінної. При проведенні аналізу властивостей динаміки реальних систем необхідно обчислити експоненти Ляпунова за часовим рядом.

При незмінній структурі векторного поля, залишається невідомою загальна функція розподілу норм дотичних векторів, адже відповідно до означення автономної системи, наведеного вище, поведінка системи має бути повністю визначеною при відомих початкових умовах. Динаміка цих норм є важливою при проведенні чисельного аналізу локальних і в деяких випадках глобальних властивостей динамічних систем, при обчисленні експонент Ляпунова та дослідженні «хаотичних» або «гіперхаотичних»

процесів на їх основі, моделюванні динамічних систем та ін.

Терміни «хаотична» або «гіперхаотична» динаміка потребують додаткових трактувань. Наприклад, в [26] зазначається, що наявність таких властивостей як один і більше додатних експонент Ляпунова в спектрі та за умови нецілочисельної фрактальної розмірності веде до «хаотичної» динаміки (наприклад, система Лоренца, Ресслера, Маккея – Гласа, відображення Енона та ін.). Якщо додатних експонент Ляпунова в спектрі більше одного, то – до «гіперхаотичної» динаміки (наприклад, гіперхаос Ресслера та ін.). В обох випадках нецілочисельність розмірності (фрактальної) є суттєвою.

Встановивши умови топологічно еквівалентних динамічних систем, цікаво дослідити розмірність Каплана-Йоркі для них, які описуються як різницевиими, так і звичайними диференціальними рівняннями.

В [16] описується, що фрактальні розмірності нерегулярних кривих і поверхонь виявилися корисними фізичними поняттями, наприклад, забезпечивши корисний показник для характеристики енергетичного каскаду і вихрового розтягування в повністю розвиненій турбулентності; досліджуються потоки автономних дисипативних систем. Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь Лоренца. За припущенням Х. Морі [16], існує зв'язок між фрактальною розмірністю атратора і його спектром експонент Ляпунова. Але чисельні розрахунки в [17] підтримують гіпотезу Дж. Каплана та Дж. Йоркі [18].

У роботі [19] розглядаються геометричні та деякі топологічні особливості систем звичайних диференціальних рівнянь Ресслера, Лоренца, гіперхаосу Ресслера та ін., глобальні властивості Вільямса [20] і Шоу [21], які «розкладають» фрактальну структуру до простих згорнутих листів. В [21] також наводяться кроки до класифікації дивних атраторів. Зазначається, що дослідження топології дивних атраторів зводиться до топології розв'язків диференціальних рівнянь, які керують потоком. Однак

розмірність Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних систем не досліджується.

В [22] було доведено, що змістовна концепція розмірності дивних атракторів може бути визначена в термінах експонент Ляпунова, яку називають ляпуновською або розмірністю за Ляпуновим. Розглядається ляпуновська розмірність для «хаотичних» систем різницевих рівнянь, які мають вигляд:

$$X_k = f(X_{k-1}), \quad (1.3)$$

де $f: B \rightarrow B$, B - компактна n - вимірна множина, $f(B) \subset \text{interior}(B)$, зокрема $f^{k+1}(B) \subset f^k(B)$, а атрактор для (1.3) визначається як $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(B)$; X_k є вектором.

У Дж.Д. Фармера та ін. в [23] розглядаються розмірності різних означень, причому розглядається динамічна система як різницевих рівнянь (1.3), так і звичайних диференціальних рівнянь (з неперервним часом). Зазначається, що означення розмірності мають два типи: одні залежать від метричних властивостей, а інші – від частоти з якою типова траєкторія відвідує різні області атрактора. Стверджується, що всі залежні від частоти розмірності приймають одне і те ж значення, яке називають «розмірністю природної міри», а всі метричні розмірності приймають загальне значення, яке називають фрактальною розмірністю; розмірності, які залежать від частоти, дорівнюють розмірності за Ляпуновим, яку, при відомих рівняннях, набагато легше обчислити, ніж будь-яку іншу розмірність. В [23] надається перевага ляпуновській розмірності, яка є більш фізично доречною, ніж інші розмірності.

Представимо впорядкування спектра експонент Ляпунова в порядку їх зменшення: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, тоді ляпуновська розмірність Каплана-Йоркі

[24] має такий вигляд

$$D_{KY} = \zeta + \frac{1}{\lambda_{\zeta+1}} \sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i,$$

де ζ визначається з нерівностей

$$\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\zeta+1} \lambda_i < 0.$$

Підкреслимо, що ζ - це кількість перших невід'ємних експонент Ляпунова в спектрі; якщо експоненти Ляпунова всі негативні, то $\zeta = 0$.

Дж.Д. Фармер та ін. в [23] показали, що ляпуновська розмірність дорівнює інформаційній та визначається для двовимірного випадку наступним виразом

$$D_I = D_{KY} = 1 + \frac{H(\alpha)}{\alpha \ln(1/\lambda_1) + \beta \ln(1/\lambda_2)},$$

$$\beta = 1 - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Ця рівність також зазначається в [24], де $H(\alpha)$ - ентропія.

При $\lambda_1 = \lambda_2$, маємо

$$\alpha = \beta = 0,5;$$

$$D_I = D_{KY} = 1 + \frac{H(\alpha)}{p_1 \ln(1/\lambda_1) + p_2 \ln(1/\lambda_2)};$$

$$D_I = D_{KY} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)} = D_c.$$

Таким чином, у даному випадку, маємо рівність $D_I = D_{KY} = D_c$, де D_c - ємність, D_I - інформаційна розмірність [24].

Основною проблемою залишається вибір тієї розмірності, яка досить ефективно відображає структуру досліджуваної динамічної системи (заданої системою диференціальних рівнянь), наприклад, на компактному гладкому многовиді класу C^σ , $\sigma \geq 2$. Зазначимо, що компактність многовиду гарантує [4], що рішення диференціальних рівнянь продовжуються необмежено. В [25] також наведена коротка характеристика різних розмірностей і розглядаються співвідношення між ними. Поняття розмірності необхідно для характеристики властивостей динамічної системи, яка показує загальну інформацію, необхідну для вказівки позиції точки із заданою точністю, наприклад на атракторі [23]. Оцінкою нижньої межі кількості змінних, що визначають динаміку системи, є фрактальна розмірність [24]. У статті [26] зазначається, що основними чинниками, які характеризують «хаотичну» поведінку, є позитивні експоненти Ляпунова і нецілочисельна метрична (фрактальна) розмірність. Це поняття набуло розвитку і для оптичного її вимірювання, використавши аналогові пристрої [24], наприклад, для деяких простих завдань, таких як двовимірне відображення Пуанкаре [24]. В [24] також описується оптична інтерпретація кореляційного інтеграла і пропонується схема експериментальної установки. Таким чином розмірність за Ляпуновим і дослідження взаємозв'язків з іншими розмірностями має важливе прикладне застосування.

Під метричною розмірністю зазвичай розуміється розмірність Хаусдорфа-Безиковича [25], заснована на покритті деякої досліджуваної множини точок гіперкуба в фазовому просторі, причому підрахунок цих гіперкубів вимагає дуже великих обчислювальних можливостей [25]. Тому

використовується ряд означень, які спрощують і допускають чисельний розрахунок [25]. Оцінкою зверху для хаусдорфової розмірності вважається гранична ємність [24, 25], яка є чисто метричною. У разі динамічної системи, необхідно враховувати ймовірнісну міру, тобто таку частоту, з якою фазова траєкторія відвідує різні частини многовиду. Однією з таких оцінок є інформаційна розмірність [25, 27]. Грасбергер і Прокаччі показали в [27], що розмірність, названа кореляційною, враховує спільну ймовірність попадання пари точок в кожен елемент розбиття і повинна бути чисельно менше, ніж інформаційна розмірність. Узагальнена розмірність, яка описується ентропією Реньї деякого порядку, об'єднує ємність, інформаційну та кореляційну розмірності [24,25,27,28]. Також виділяється хаусдорфова розмірність ядра, ємність ядра [25] та ін. Однією з найбільш часто використовуваних, при дослідженні динамічних систем, є розмірність за Ляпуновим [25, 23, 29], запропонована Капланом і Йоркі [23, 29], яка встановлює співвідношення між фрактальною розмірністю, інформаційною ентропією і експонентами Ляпунова [25, 23]. Автор додержується терміна «експоненти Ляпунова», щоб підкреслити їх значення середнього експоненціального темпу дивергенції (конвергенції) сусідніх орбіт в фазовому просторі. Каплан і Йоркі використовували числа Ляпунова, від яких можна перейти до експонент Ляпунова. Для регулярних атракторів ляпуновська розмірність збігається з топологічною розмірністю [25].

З формули Каплана-Йоркі для регулярних атракторів отримуються значення розмірності, які, як стверджується в [25], співпадають з топологічною розмірністю відповідних множин (у дужках наводиться сигнатура спектра експонент Ляпунова): $D_{KY} = 0$ для стану рівноваги $(-, -, -, -, \dots)$; $D_{KY} = 1$ для граничного циклу $(0, -, -, -, \dots)$; $D_{KY} = 2$ для двовимірного тору $(0, 0, -, -, \dots)$; $D_{KY} = N$ для N - вимірного тору $(0, 0, \dots, 0, -$

,...)). Розглядається в [25] також динамічні системи з постійним розтягуванням і стисненням, для яких $D_{KY} = D_C$.

В [23] показано, що інформаційна розмірність і ляпуновська розмірності рівні, причому виникає ентропія нормованого вектора норм дотичних векторів $\|r_i(t)\|$, $i = 1, \overline{d}$, відповідно експонент Ляпунова в спектрі λ_i , $i = 1, \overline{d}$. На сьогодні ця ентропія не досліджувалась, зокрема не було виведено загальний вигляд функції динаміки норм дотичних векторів.

В [30] вводиться поняття локальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини в точці та зазначається, що вона є показником «масивності» множини, «компактності» його точок або степені розривності. За своєю природою локальна розмірність не визначає внутрішньої будови множини, а виступає як зовнішня властивість множини, тобто будучи властивістю локальною, характеризує множину в цілому. Термін «фрактальна розмірність» деякої множини [30] є свідченням того, що топологічна розмірність не співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Встановлені залежності в роботах J. Kaplan, J. Yorke, В.С. Онищенко, Н. Могі та ін. для ляпуновської розмірності, як деякої оцінки метричної розмірності Хаусдорфа-Безиковича, стали важливими при дослідженні цієї розмірності для топологічно та орбітально топологічно еквівалентних систем.

Теорема 1.6. [30] Нижньою межею розмірностей Хаусдорфа-Безиковича для усіх метрик компакта E дорівнює його топологічній розмірності.

Наслідок 1.1. [30] Топологічна розмірність і розмірність Хаусдорфа-Безиковича компакта E пов'язані нерівністю $\dim E \leq \alpha(E)$.

В [30, 31] було зазначено, що топологічно подібні множини мають однакову розмірність. У П.С. Урисона [31] вводиться так звана індуктивна

розмірність. Сутність якої полягає в тому, що деякій множині E ставиться у відповідність ціле число $n \geq 1$ або ∞ за деяким індуктивним принципом. Однак множини топологічно не можна розглядати в сенсі «однорідності» як за П.С. Урисоном, бо існують множини, у яких різні області мають різну розмірність. Тому поняття топологічної розмірності, як зазначається в [30] несе локальний або точковий характер і тому розмірність всієї множини E буде дорівнювати найбільшій розмірності в точці.

Зокрема Ф. Такенс в [32] розглядає розмірність Хаусдорфа-Безиковича та граничну ємність. У Дж.Д. Фармера [23] пояснюється граничність ємнісної розмірності та показано це на двовимірному прикладі вище. Для топологічно еквівалентних динамічних систем розмірність не розглядається. Однак в [32] доводяться важливі теореми для динамічних систем на компактному гладкому многовиді, які є основою реконструкції динамічних систем і актуальні на сьогодні.

Нехай M - компактний многовид, а динамічна система на M є дифеоморфізм $\varphi: M \rightarrow M$ (дискретний час) або векторне поле f на M (неперервний час). В обох випадках часова еволюція, відповідно з початковою точкою $x_0 \in M$, позначається $\varphi_t(x_0)$: для дискретного часу $t \in \mathbb{N}$, а $\varphi_t = (\varphi)^t$; для неперервного часу $t \in \mathbb{R}$, а $t \rightarrow \varphi_t(x_0)$, яке є інтегральною кривою, яка проходить через точку x_0 [32].

Теорема 1.7 ([32], Ф. Такенс) Нехай M - компактний многовид розмірності m . Для пари (φ, y) , $\varphi: M \rightarrow M$ гладкий дифеоморфізм і $y: M \rightarrow \mathbb{R}$ гладкої функції, існує загальна властивість, що відображення $F_{(\varphi, y)}(x) = (y(x), y(\varphi(x)), \dots, y(\varphi^{2^m}(x)))$ є вкладенням, а під гладкістю розуміється C^2 .

Зазначається в [32], що ця теорема буде справедливою і для не компактного M , якщо обмежити спостереження до відповідних функцій.

Теорема 1.8 ([32], Ф. Такенс) Нехай M - компактний многовид

розмірності m . Для пари (X, y) , X гладке (тобто C^2) векторне поле і y - гладка функція на M , існує загальна властивість, що $F_{X,y}(x) = (y(x), y(\varphi_1(x)), \dots, y(\varphi_{2m}(x)))$ є вкладенням, де φ_t є потоком X .

Теорема 1.9 ([32], Ф. Такенс) Нехай M - компактний многовид розмірності m . Для пари (X, y) , X гладке векторне поле і y - гладка функція на M , існує загальна властивість, що відображення $\tilde{F}_{X,y} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$, визначене як

$$\tilde{F}_{X,y}(x) = (y(x), \frac{d}{dt}(y(\varphi_t(x)))|_{t=0}, \dots, \frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(y(\varphi_t(x)))|_{t=0})$$

є вкладенням, де φ_t є потоком X ; під гладкістю розуміється C^{2m+1} .

Теорема 1.10 ([32], Ф. Такенс) Нехай M - компактний многовид, X векторне поле на M з потоком φ_t і ρ - точка в M . Тоді є залишкова підмножина $C_{X,\rho}$ додатних дійсних чисел, що для $\alpha \in C_{X,\rho}$, додатні граничні множини ρ для потоку φ_t від X і для дифеоморфізму φ_α є однаковими. Іншими словами, для $\alpha \in C_{X,\rho}$, кожна точка $q \in M$, яка є граничною підмножини $\varphi_{t_i}(\rho), t_i \in \mathbb{R}, t_i \rightarrow +\infty$, є межею підмножини $\varphi_{n_i} \alpha^{(\rho)}, n_i \in \mathbb{N}, n_i \rightarrow \infty$.

Дослідження робастної або структурно стійкої дисипативності дискретних систем проводилися М.М. Личаком [33]. В [34] В.В. Волосовим були запропоновані робастні алгоритми оцінювання стану багатовимірних нестационарних динамічних об'єктів. Робастні методи оцінювання розглядаються в [35]. В.М. Кунцевич і його учні розвинули робастні методи управління [36-46]. У статті В.О. Яценка та ін. [47] розглядалася проблема прогнозування геомагнітної активності D_{st} індекса за допомогою нелінійної динамічної системи. Серед множини стійких

моделей, чисельно доводиться існування єдиної стійкої моделі мінімальної складності структури.

У дисертації вводиться поняття граничних за ентропією нормованого вектора норм дотичних векторів, необхідність у якому виникло при аналізі тільки одного типу фазових портретів динамічних систем. Ця ентропія несе важливі характеристики динамічної системи, особливо якщо остання може змінювати структуру, тоді спрямування ентропії до екстремуму свідчитиме про однозначну зміну фазового портрету. Типи фазових портретів у багатовимірному просторі досліджувалися, наприклад, у роботах В.І. Арнольда та ін.

Можливість проводити аналіз властивостей динаміки автономних систем за допомогою цієї ентропії обумовило розгляд задачі чисельного її обчислення за часовим рядом, оскільки дуже часто немає диференціальних рівнянь реальної системи, проте можливо отримати експериментальний часовий ряд.

Задачу обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом одними з перших поставили Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A., Sano M. та Sawada Y. У дисертаційній роботі за допомогою диференціального числення вдосконалюється обчислення локальної матриці Якобі через застосування інтерполяційних многочленів Лагранжа або Тейлора.

Показано також існування декомпозиції експонент Ляпунова, які можуть бути застосовані при дослідженні динаміки змінювання структури векторного поля різноманітних систем, наприклад, таких як магнітне поле та його рівень флуктуацій (Кр індекс). Представлені чисельні розрахунки спектру експонент Ляпунова та фрактальної розмірності Каплана-Йоркі для геомагнітних індексів.

Останнім часом спостерігається інтерес до розвитку NARMAX (Nonlinear AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs) моделей, які представляють собою різницеві рівняння. В області космічної погоди

значна увага приділяється фундаментальним і прикладним дослідженням для якісного прогнозування динаміки геомагнітних індексів, дослідженням магнітосфери та іоносфери. Розробляються нові та вдосконалюються наявні методи прогнозування часових рядів, отриманих при супутникових спостереженнях. Привертають увагу нейронні мережі, NARMAX, білінійні системи, запропонована модель В.О. Яценком NARMAX + експоненти Ляпунова (Київ, Інститут космічних досліджень НАН України та ДКА України). Однак при багатовимірності та нелінійності реальних систем дослідження властивостей динаміки є однією зі складних задач, які потребують розв'язку.

1.2. Основні результати дисертації

Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність роботи, наведено мету і завдання дослідження, розкрито сутність і наукову новизну отриманих результатів.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації і попередні відомості отриманих результатів у дисертаційній роботі.

У другому розділі досліджено гіперболічні динамічні системи, умова їх локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності.

У диференціальному рівнянні, за яким відбувається еволюція дотичних векторів, матриця Якобі має ключове значення. Тому розглянуто важливу задачу аналізу локальних властивостей з встановлення необхідних і достатніх умов рівності локальних матриць Якобі для дослідження локальної грубості (структурної стійкості) динамічних автономних систем та встановлено їх дифеоморфність.

Для розв'язання задачі знаходження функції динаміки норм дотичних векторів запропоновано застосувати принцип максимуму, який

поширений в теорії прийняття рішень в умовах невизначеності (наприклад, [50]). Основна сутність цього принципу полягає в тому, що найбільш характерними векторами є такі, які максимізують міру невизначеності (ентропію) при заданій інформації про «поведінку» середовища. Схожий принцип для знаходження екстремальних функцій розподілу фізичних ансамблів частинок вперше застосовував Гіббс [50]. У роботах Джейнса [51, 52] був запропонований формалізм відновлення невідомих законів розподілу випадкових величин за наявності обмежень з умови максимуму ентропії Шеннона. За Джейнсом, «принцип максимальної невизначеності можна розглядати як поширення принципу недостатньої підстави Бернуллі-Лапласа з наступною відмінністю: прийняття вектора, який забезпечує максимальну невизначеність, можна мотивувати тим позитивним розумінням, що воно визначається однозначно, як таке, яке допускає найбільшу варіабельність відносно недостатньої інформації замість негативного розуміння, що не має підстав запропонувати щось інше». У такому випадку, вектор з максимальною невизначеністю має властивість врахування усіх можливостей, оскільки, навіть, за умов, що настання деякої ситуації не виключається наявною інформацією, цей підхід дає можливість додати «позитивну вагу» кожній ситуації. Принципальний підхід і наявні приклади практичного складання функціоналів, наприклад, у вигляді лагранжіана, Р.І. Трухайова, Гіббса, Джейнса тощо дають можливість записати функціонал і з умови існування екстремуму для нього вивести шукану функцію динаміки норм дотичних векторів. Однак не кожний отриманий функціонал дозволяє повністю розв'язати задачу; конструктивним буде лише той, з якого можна вивести також і формули експонент Ляпунова.

У даній роботі надається перевага застосуванню терміна «експоненти Ляпунова», щоб підкреслити їх означення експоненціального темпу дивергенції або конвергенції сусідніх орбіт у фазовому просторі

динамічної системи, а не «показники Ляпунова».

Виведення функції динаміки норм дотичних векторів для кожного моменту часу t дає не тільки розуміння природи даного процесу, але й має важливе практичне застосування, особливо при обчисленні експонент Ляпунова та горизонту прогнозу.

Описується виявлення ентропії Шеннона для нормованого вектора норм дотичних векторів. Цей вектор задовольняє деякому функціоналу (лагранжіану), який представляє собою максимізацію суми згаданої ентропії, функції середньої експоненціальної дивергенції (конвергенції), початкових умов і нормування (вектора норм дотичних векторів) для кожного моменту часу t . Доводиться відповідна теорема. Наводиться означення згаданої ентропії та середньої ентропії. Динамічні системи, які описуються диференціальними рівняннями на d вимірному многовиді локально не відрізняються від диференціальних рівнянь на \mathbb{R}^d . У якості норми використовується евклідова норма.

Якщо функція дивергенції прямує до середнього темпу експоненціальної дивергенції (конвергенції), помноженої на час t , тобто до експонент Ляпунова, помножених на час t , а за означенням, експоненти Ляпунова представляють собою середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції), то середня ентропія має границю при $t \rightarrow \infty$, яка дорівнює нулю. Доводиться відповідна теорема. Сама середня ентропія має границю при $t \rightarrow \infty$, оскільки кожна з ймовірностей має границю при $t \rightarrow \infty$.

У третьому розділі значна увага приділяється розмірності Каплана-Йоркі або ляпуновській розмірності для топологічно еквівалентних динамічних систем та досліджується ентропія, виявлена Фармером та ін., сумісно з розмірністю Каплана-Йоркі. Наводиться опис розмірності Каплана-Йоркі та її взаємозв'язок з іншими розмірностями.

Якщо середня ентропія (розглянута у другому розділі) досягає максимуму, тоді розмірність Каплана-Йоркі прямує до ємності для динамічної системи на площині, а також має такі властивості нелінійних точок положення рівноваги як дикритичний (скалярна матриця) або вироджений вузол (жорданова клітка).

У топологічно еквівалентних динамічних систем розмірність Каплана-Йоркі співпадає, про що доводяться наслідки.

Четвертий розділ присвячується обґрунтуванню чисельних методів обчислення розмірності Каплана-Йоркі, експонент Ляпунова та дослідження векторних полів за часовими рядами автономних систем за допомогою декомпозиції експонент Ляпунова. Обґрунтовано застосування чисельного диференціювання за часовим рядом за допомогою полінома Тейлора і Лагранжа. Зазначається, що многочлен (поліном) Лагранжа точно проходить через задані вузли, тому йому надається більша перевага, ніж многочлену Тейлора для даної задачі.

Для обчислення експонент Ляпунова за часовими рядами ключовою задачею є знаходження чисельної локальної матриці Якобі. Чим точніше буде оцінена ця матриця, тим точнішим буде оцінка експонент Ляпунова. Найпростіші формули чисельного диференціювання одержуються через диференціювання інтерполяційних формул. Представивши часовий ряд у вигляді складеної функції, можна знайти похідну за часом. У результаті в загальній формулі похідної будуть шукані елементи матриці Якобі. Застосувавши метод найменших квадратів (максимальної правдоподібності або ентропії), можна оцінити значення локальної матриці Якобі.

Через декомпозицію експонент Ляпунова виводиться показник виявлення постійності або змінності векторного поля динамічної системи. Показано впорядкування декомпозиційних границь. Наводиться чисельний алгоритм для обчислення цих границь за часовим рядом.

Проводиться аналіз властивостей динаміки геомагнітних індексів Dst, Kp, AE. Врахувавши можливу зміну структури системи геомагнітних індексів, зростання ентропії до максимальної (розрахунки показують близькість до граничних значень середньої ентропії) задає напрямок на можливу зміну типу фазового портрету.

До кожного з розділів 2 – 4 зроблено висновки щодо отриманих результатів аналізу властивостей динаміки автономних систем. У кінці роботи наводяться загальні висновки.

РОЗДІЛ 2

ЛОКАЛЬНА СТРУКТУРНА СТІЙКІСТЬ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У цьому розділі розглядаються системи звичайних диференціальних рівнянь з гіперболічною лінеаризованою частиною і умови їх локальної дифеоморфності, топологічної та орбітальної топологічної еквівалентності. Досліджується нормований вектор евклідових норм дотичних векторів. Доводиться необхідна і достатня умова локальної дифеоморфності, топологічної та орбітально топологічної еквівалентності систем. Допускається, що (локальна) матриця Якобі, обчислена в околі точки, системи серед власних значень не має нульових, а також власні значення не знаходяться на уявній вісі (виконуються умови Гробмана-Гартмана).

2.1. Вектор норм дотичних векторів у багатовимірному просторі

2.1.1. Постановка задачі. Розглянемо автономну динамічну систему:

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

де $f(x)$ - визначена в області $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, $f(0) = 0$; $f(x)$ і $\partial f(x)/\partial x$ - неперервні в G (локальна гомеоморфність компактного гладкого многовиду M деякому околу евклідового простору дозволяє розглядати систему (2.1) на M в області $G \subset \mathbb{R}^d$ при дослідженні локальних властивостей). Накладені обмеження гарантують існування і єдиність розв'язку $x(x_0, t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах x_0 . Нехай

$f(x)$ є вектор-функцією принаймні гладкості C^2 [48].

Означення 2.1. Лінеаризована динамічна система (2.1) називається гіперболічною, якщо матриця Якобі в околі нуля не має власних значень на уявній вісі.

Розглянемо наступні дві траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, почавши з двох сусідніх початкових умов x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за наступними векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з евклідовою нормою $\|r(x_0, t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Якщо $f(x)$ - нелінійна вектор-функція принаймні гладкості C^2 , то (2.1) можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати в матричному вигляді:

$$\dot{x} = Jx + \sum_{\zeta=2}^{\infty} \frac{1}{\zeta!} V_{\zeta}(x), \quad (2.2)$$

де $J = \partial f(x)/\partial x|_{x=x_0}$ - матриця Якобі для $f(x)$, а складові $V_{\zeta}(x)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості, $\zeta \geq 2$. Динаміка або еволюція вектора $r(x_0, t)$ надається рівнянням першого наближення (лінеаризацією системи (2.1)):

$$\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t). \quad (2.3)$$

У просторі \mathcal{R}^d існує d ортонормованих векторів e_i . Позначимо норми векторів $\|r(e_i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$ як $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1, d}$. Тоді вектор

$p_i(\|r_i^t\|) = \|r_i^t\| / \sum_{i=1}^d \|r_i^t\|$, де $\|r_i^t\|$ - норма вектора, $i = \overline{1, d}$ для кожного моменту часу t , який будемо також позначати як p_i , $i = \overline{1, d}$.

Означення 2.2. Ентропією називається величина $E(p) = -\sum_{i=1}^d p_i \ln p_i$, $i = \overline{1, d}$.

Означення 2.3. Величина $\overline{E(p)} = -\sum_{i=1}^d \overline{p_i} \ln \overline{p_i}$, де $\overline{p_i} = \frac{\|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}{\sum_{j=1}^d \|r_j^0\| \exp(\lambda_j)}$,

$i = \overline{1, d}$, називається середньою ентропією, де λ_i - експоненти Ляпунова, $i = \overline{1, d}$ [49].

Нехай система (2.2) є гіперболічною, а також серед власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі нуля не має нулів (умови Гробмана-Гартмана).

Ставиться задача складання функціонала у вигляді лагранжіана для системи (2.1) для виведення p_i , $i = \overline{1, d}$, що представляє собою нормований вектор норм дотичних векторів.

2.1.2. Функціонал динаміки норм дотичних векторів для автономних систем. Пропонується застосувати принцип максимуму ентропії (аналог другого закону термодинаміки), представлений в [50], який використовується для знаходження невідомих дискретних функцій розподілу. В [50] також сформульована основна сутність цього принципу, яка полягає в тому, що найбільш характерними дискретними розподілами є такі, які максимізують міру невизначеності (ентропію) при заданій інформації про «поведінку» середовища. Схожий принцип для знаходження екстремальних функцій розподілу фізичних ансамблів частинок вперше застосовував Гіббс [50]. Джейнсом [51, 52] був запропонований формалізм відновлення невідомих законів розподілу

випадкових величин за наявності обмежень з умови максимуму ентропії Шеннона. Сутність цього формалізму полягає в тому, що «найменш сумнівним представленням ймовірностей буде таке представлення, яке максимізує невизначеність при врахуванні усієї заданої інформації» [50]. В [50, 52] зазначається, що за Джейнсом, «принцип максимальної невизначеності можна розглядати як поширення принципу недостатньої підстави Бернуллі-Лапласа з наступною відмінністю: прийняття розподілу, який забезпечує максимальну невизначеність, можна мотивувати тим позитивним розумінням, що воно визначається однозначно, як таке, яке допускає найбільшу варіабельність відносно недостатньої інформації замість негативного розуміння, що не має підстав запропонувати щось інше». У такому випадку, розподіл з максимальною невизначеністю має властивість врахування усіх можливостей, оскільки, навіть, якщо якась ситуація не виключається наявною інформацією, все одно цей підхід дає можливість додати «позитивну вагу» кожній ситуації. Подальше застосування описаних принципів й формулювання аналогічних тільки поширюється [53].

Властивості ентропії Шеннона [50]:

а) E_p неперервно диференціюється відносно p_i , $i = \overline{1, d}$;

б) $E_p \geq 0$, а для виродженого випадку $E_p = 0$;

в) E_p є унімодальною за p_i , $i = \overline{1, d}$, а максимум досягається E_p

досягається при $p_1 = p_2 = \dots = p_d = 1/d$;

г) $E_p^{\max} = \ln d$, при збільшенні d монотонно зростає;

г) E_p симетрична за p_i , $i = \overline{1, d}$ відносно рівності

$p_1 = p_2 = \dots = p_d = 1/d$;

д) E_p вогнута за p_i , $i = \overline{1, d}$;

е) E_p адитивна за станами $\theta_i \in \Theta$.

Помічені особливості динаміки автономних динамічних систем, в тому числі «хаотичних» (наприклад, системи Лоренца, Ресслера) дозволяють сформулювати принцип, за яким відбувається еволюція норм векторів дотичних у просторі дотичних. Знайдемо нормований вектор норм векторів дотичних p_i , $i = \overline{1, d}$, визначеному в d - вимірному фазовому просторі деякої досліджуваної автономної динамічної системи. Принцип, за яким відбувається еволюція норм векторів дотичних, полягає у наступному. Найбільш характерним вектором p_i , $i = \overline{1, d}$ є такий вектор, який максимізує обрану міру невизначеності (наприклад, ентропія нормованого вектора p_i , $i = \overline{1, d}$) при заданому темпі дивергенції або конвергенції сусідніх орбіт у деякому фазовому просторі, початковій умові та умові нормування [51].

Теорема 2.1. [48-49] Якщо система (2.1) з матрицею Якобі J є гіперболічною, J не має нульових власних значень, то $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1, d}$ має

$$p_i = \|r_i^t\| / \sum_{j=1}^d \|r_j^t\|, \quad i = \overline{1, d}, \text{ який максимізує функціонал}$$

$$\Phi(p) = E(p) + \beta Z(p) + \mu \mathfrak{Z}(p) + \gamma N(p), \quad (2.4)$$

де β, μ, γ - множники Ейлера - Лагранжа, $E(p)$ - ентропія, $Z(p)$ - експоненціальна дивергенція (конвергенція), $\mathfrak{Z}(p)$ - початкові умови, $N(p)$ - умова нормування.

Доведення. Перепишемо функціонал (2.4) розширено:

$$\begin{aligned} \Phi(p) = & - \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) \ln p_i (\|r_i^t\|) + \beta \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) \tilde{l}_i^t + \\ & + \mu \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^0\|) \ln \|r_i^0\| + \gamma \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де β, μ, γ - множники Ейлера - Лагранжа, ентропія

$E(p) = - \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) \ln p_i (\|r_i^t\|)$, експоненціальна дивергенція (конвергенція)

$Z(p) = \beta \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) \tilde{l}_i^t$, початкові умови $\mathfrak{Z}(p) = \mu \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^0\|) \ln \|r_i^0\|$, умова

нормування $N(p) = \gamma \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|)$, \tilde{l}_i^t , $i = \overline{1, d}$, визначають з умови

експоненціального темпу дивергенції (конвергенції) $\lambda_i t = \beta \tilde{l}_i^t$ у момент часу t , причому середній експоненціальний темп дивергенції або конвергенції $\beta \tilde{l}_i = \lambda_i$.

Умовою нормування встановлюється $\sum_{i=1}^d p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = \overline{1, d}$. Для

кожного моменту часу $t \geq 0$ з умови існування екстремуму знаходимо

$$\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_i (\|r_i^t\|)} = -\ln p_i (\|r_i^t\|) - 1 + \beta \tilde{l}_i^t + \mu \ln \|r_i^0\| + \gamma = 0, \quad i = \overline{1, d}.$$

Маємо систему рівнянь

$$\ln p_i (\|r_i^t\|) = \beta \tilde{l}_i^t + \mu \ln \|r_i^0\| + \gamma - 1, \quad i = \overline{1, d},$$

звідки отримуємо $p_i (\|r_i^t\|) = e^{\beta \tilde{l}_i^t} e^{\mu \ln \|r_i^0\|} e^{\gamma-1} = e^{\beta \tilde{l}_i^t} \|r_i^0\|^\mu e^{\gamma-1}$, $i = \overline{1, d}$.

Крім того, з умови $\sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) = 1$ отримується $\sum_{i=1}^d \left(e^{\beta \tilde{l}_i^t} \|r_i^0\|^\mu \right) e^{\gamma-1} = 1$,

$$e^{\gamma-1} = 1 / \sum_{i=1}^d \left(\|r_i^0\|^\mu e^{\beta \tilde{l}_i^t} \right);$$

$$p_i(\|r_i^t\|) = \frac{\|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t)}{\sum_{i=1}^d \left(\|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t) \right)}. \quad (2.6)$$

Нехай $\mu = 1$. Позначив $\|r_i^0\|^\mu = v_i^0$, з використанням означення 2.2 отримуємо

$$p_i(\|r_i^t\|) = \frac{v_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i^t)}{\sum_{i=1}^d (v_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i^t))} = \frac{\|r_i^t\|}{\sum_{i=1}^d \|r_i^t\|}.$$

$$\|r_i^t\| = v_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i^t) = p_i(\|r_i^t\|) \sum_{i=1}^d (v_i^0 \exp(\beta \tilde{l}_i^t)) = p_i(\|r_i^t\|) \sum_{i=1}^d \|r_i^t\|, \quad (2.7)$$

звідки для кожного моменту часу $t \geq 0$ можна знайти темп дивергенції (конвергенції) $\beta \tilde{l}_i^t$, а отже середній темп $\beta \tilde{l}_i$ задається формулою

$$\lambda_i = \beta \tilde{l}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i \sum_{i=1}^d \|r_i^t\|}{p_i \sum_{i=1}^d v_i^0} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i^t\|}{\|r_i^0\|}. \quad (2.8)$$

Отримання з функціоналу (2.4 або 2.5) спектра експонент Ляпунова (2.8), врахувавши (2.7), який показує середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) сусідніх орбіт в фазовому просторі, означає, що, дійсно, вони (експоненти Ляпунова) задають найхарактерніший вектор p_i ,

$i = \overline{1, d}$, для початкових умов та умов нормування, при яких досягається максимум функціоналу (2.4 або 2.5).

Теорему доведено.

Теорема 2.2. Якщо експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) дорівнює $Z(p) = \beta \tilde{l}_i^t t$ в (2.5) і спектр експонент Ляпунова впорядковується за зменшенням $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, то $\beta \tilde{l}_i^t = \lambda_i$, а $\overline{E(p)} = -\sum_{i=1}^d \overline{p_i} \ln \overline{p_i} = 0$, $p_1 = 1$, $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$.

Доведення. Якщо $Z(p) = \beta \tilde{l}_i^t t$, то з умови максимізації функціонала (2.5) $\partial \Phi(p) / \partial p_i (\|r_i^t\|) = 0$, застосувавши умову нормування

$$N(p) = \sum_{i=1}^d p_i (\|r_i^t\|) = 1, \quad i = \overline{1, d}, \quad \text{вектор прийме вигляд:}$$

$$p_i (\|r_i^t\|) = \frac{\|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)}{\sum_{i=1}^d \|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)}. \quad \text{При вираженні } \beta \tilde{l}_i^t \text{ через інші змінні з цього}$$

вектора: при $\|r_i^t\| = \|r_i^0\| \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)$, тоді $\beta \tilde{l}_i^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i^t\|}{\|r_i^0\|}$. Тому $\beta \tilde{l}_i^t$ має

означення експонент Ляпунова при $Z(p) = \beta \tilde{l}_i^t t$, тобто $\beta \tilde{l}_i^t = \lambda_i$, $i = \overline{1, d}$.

Знайдемо границю

$$p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|r_1^0\|^\mu \exp(\lambda_1 t)}{\sum_{i=1}^d \|r_i^0\|^\mu \exp(\lambda_i t)} = [\exp(\lambda_1 t)] = \frac{\|r_1^0\|^\mu}{[\|r_1^0\|^\mu + \dots + 0]} = 1.$$

Тепер очевидно, що $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$, врахувавши впорядкування $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$. При таких значеннях елементів вектора

$$\overline{E(p)} = 0 \text{ [49].}$$

Теорему доведено.

Якщо J в околі будь-якої точки $x(x_0, t)$ системи (2.2) є гіперболічною, не має нульових власних значень і $d \geq 2$, то існує границя середньої ентропії

$$\overline{E(p)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(- \sum_{i=1}^d \overline{p_i} \ln \overline{p_i} \right), \quad i = \overline{1, d},$$

$$\text{де } \overline{p_i} = \frac{\|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}{\sum_{i=1}^d \|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}, \quad \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i^t\|}{\|r_i^0\|},$$

де λ_i и $\overline{p_i}$ - граничні величини.

Доведення очевидне.

Величини $\overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$ невід'ємні, їх сума дорівнює $\sum_{i=1}^d \overline{p_i} = 1$, для кожного $\overline{p_i}$, $i = \overline{1, d}$ є границя, тому існує границя

$$\overline{E(p)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(- \sum_{i=1}^d \overline{p_i} \ln \overline{p_i} \right), \quad i = \overline{1, d} \text{ [49].}$$

У випадку змінної матриці Якобі J (система зі змінною структурою), також існує границя ентропії $\overline{E(p)}$.

За умови структурної зміни матриці Якобі у часі спостерігається немонотонність ентропії $\overline{E(p)}$, динаміка якої може мати локальні максимуми та мінімуми, які сигналізують про зміну структури [49].

2.2. Виявлення локальної топологічної еквівалентності

2.2.1. Постановка задачі. Нехай M - компактний, $C^{\sigma+1}$ - гладкий многовид, де σ - натуральне число. Цей многовид задається атласом $\{W\}$, який складається з карт $W:U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($U \subseteq M$), TM - дотичне розшарування, $T_x M$ - дотичний до M в точці $x \in M$ простір, $\eta: TM \rightarrow M$ - канонічна проекція TM на M , а $\eta(z)$ - є такою точкою $x \in M$, у якій z дотикається до M ($\eta(z) \in T_x M$). Нехай K і $L \in C^\sigma$ - гладкими многовидами і $f: K \rightarrow L \in C^\sigma$ - гладким відображенням, $df(x): T_x K \rightarrow T_{f(x)} L$, $\forall x \in K$.

Означення 2.4. Відображення $f: TM \rightarrow M$, яке $\in C^\sigma$ - гладким, називається векторним полем на многовиді M , якщо $f(x) \in T_x M$ або $\eta(f(x)) = x, \forall x \in M$ [67].

Розглянемо автономну динамічну систему (2.1) на многовиді M .

Означення 2.5. Розв'язком системи (2.1) на часовому інтервалі $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ називається таке $C^{\sigma+1}$ - гладке відображення $\varphi: \Omega \rightarrow M$, яке перетворює систему (2.1) у тотожність на $\Omega: \dot{\varphi}(t) \equiv f(\varphi(t)), \forall t \in \Omega$, для якого $\dot{\varphi}(t), \forall t \in \Omega$ є вектором з $T_{\varphi(t)} M$, який співпадає з вектором $f(\varphi(t))$ [67].

Многовид M локально є гомеоморфним деякій області евклідового простору \mathbb{R}^d , на основі означення метричного простору [54]. Тому локально система (2.1) на многовиді M не відрізняється від такої ж системи (2.1) на \mathbb{R}^d [54].

Розглянемо деяку область U на многовиді M (див. рис. 2.1). Нехай $W: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ є картою на многовиді M , а $\varphi: \Omega \rightarrow U$ є розв'язком (2.1). Маємо відображення $F = dW(x) \cdot f \cdot W^{-1}(x)$ на \mathbb{R}^d , тобто

$F(x) = dW(W^{-1}(x))(f(W^{-1}(x)))$, $\forall x \in W(U)$. Розглянемо область розв'язків $W(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ диференціального рівняння

$$\dot{z} = F(z). \quad (2.9)$$

Функція $z = \psi(t)$: $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, яка задається формулою $\psi(t) = W(\varphi(t))$ є розв'язком рівняння (2.9). Якщо $\psi: \Omega \rightarrow W(U)$, то $\varphi(t) = W^{-1}(\psi(t))$ буде розв'язком системи (2.1). Дійсно, за допомогою простих перетворень в цьому можна переконатися: якщо $\dot{\varphi}(t) \equiv f(\varphi(t))$ та $\psi(t) = W(\varphi(t))$, то $\dot{\psi}(t) = dW(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t)) = dW(\varphi(t))(f(\varphi(t))) = dW(W^{-1}(\psi(t)))(f(W^{-1}(\psi(t)))) = F(\psi(t))$ [67].

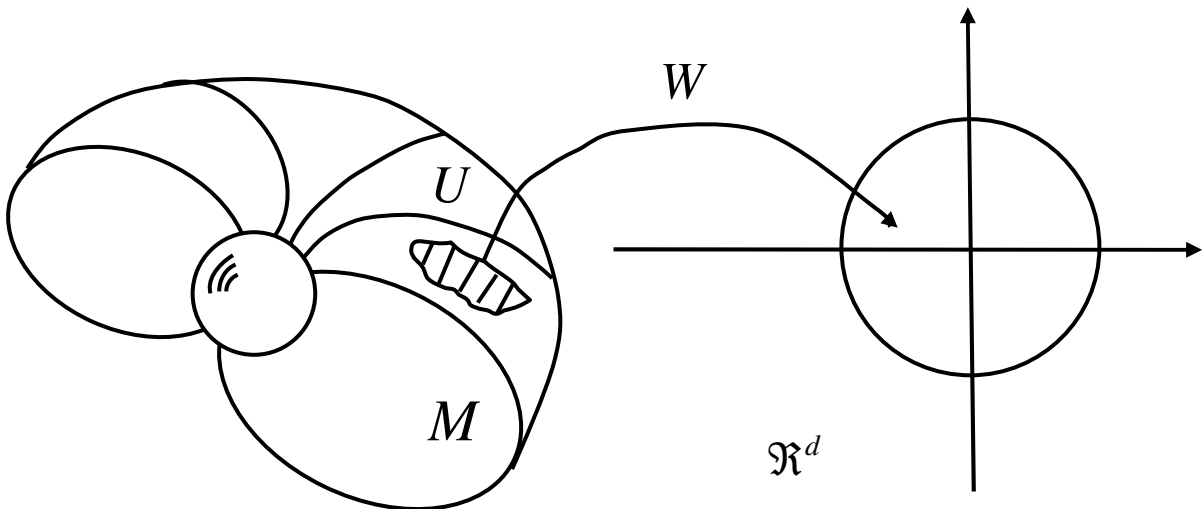


Рис. 2.1. Гомеоморфізм області на многовиді M області в \mathbb{R}^d

За теоремою Гробмана-Гартмана, динамічна система (2.1) топологічно еквівалентна своїй лінійній частині з урахуванням наявних обмежень:

а) система (2.1) є гіперболічною;

б) серед власних значень матриці Якобі, обчисленої в околі нуля не має нулів.

Нехай є такі дві динамічні системи $\dot{x} = f_1(x)$, $x \in M_1$ та $\dot{y} = f_2(y)$, $y \in M_2$ або (M_1, f_1) і (M_2, f_2) , де M_1, M_2 – компактні гладкі многовиди класу принаймні C^2 (якщо M має край, то нехай f не дотикається краю), f_1, f_2 – векторні поля. Виходячи з отриманого вище, динаміка цих систем локально еквівалентна поведінці деяких систем у \mathbb{R}^d . Ставиться задача виявлення умов локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності таких систем.

2.2.2. Доведення теореми локальної дифеоморфності.

Дифеоморфні або орбітально еквівалентні системи є топологічно еквівалентними, однак зворотне невірне [55].

Означення 2.6. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються дифеоморфними, якщо існує дифеоморфізм (диференційовне взаємно однозначне відображення, зворотне до якого також диференційовне) $h: M_1 \rightarrow M_2$, який переводить векторне поле f_1 у векторне поле f_2 [2,56].

Означення 2.7. Дві системи (M_1, f_1) і (M_2, f_2) називаються локально дифеоморфними в околі точки положення рівноваги, якщо існує такий дифеоморфізм, який переводить векторне поле f_1 в околі точки положення рівноваги однієї системи у векторне поле f_2 в околі точки положення рівноваги другої системи.

Наслідок 2.1. Якщо топологічно еквівалентні лінійні частини двох систем й виконуються умови а) і б), то топологічно еквівалентні й ці дві системи: $\dot{x} = A(x) + f_1^*(x)$, $\dot{y} = B(y) + f_2^*(y)$.

Доведення. Розглянемо дві системи $\dot{x} = A(x) + f_1^*(x)$, $\dot{y} = B(y) + f_2^*(y)$. За теоремою Гробмана-Гартмана (Теорема 1.3, 1 розділ)

при виконанні умов а) і б) наведені системи топологічно еквівалентні своїм лінійним частинам $\dot{x} = A(x)$, $\dot{y} = B(y)$, відповідно. Отже, якщо топологічно еквівалентні ці дві лінійні системи, то топологічно еквівалентні й початкові системи: $\dot{x} = A(x) + f_1^*(x)$, $\dot{y} = B(y) + f_2^*(y)$.

Наслідок доведено.

Означення 2.8. Образом векторного поля при «дифеоморфізмі на» називається векторне поле, значення якого у кожній точці є образом вектора вихідного поля у прообразі даної точки.

Нехай існує дифеоморфізм $h(x)$, для якого матриця Якобі $J_h(x)$ функції $h(x)$, обчислена в точці m_1 дорівнює $J_h(x) = I$, де I - одинична матриця.

Теорема 2.3 При виконанні умов а) і б) рівність матриць Якобі, обчислених в околі точок положення рівноваги обох систем є необхідною та достатньою умовою локальної дифеоморфності систем з однаковою розмірністю [57].

Доведення. Необхідність. Нехай існує дифеоморфізм $h(x)$ такий, що $J_h(m_1) = I$, де $J_h(m_1)$ - матриця Якобі функції $h(m_1)$, обчислена в точці m_1 , I - одинична матриця. Переведення точки положення рівноваги m_1 дифеоморфізмом одного векторного поля в точку положення рівноваги m_2 іншого векторного поля означає, що похідна цього дифеоморфізма переводить оператор лінійної частини першого поля в цій точці положення рівноваги в оператор лінійної частини другого поля в його точці положення рівноваги (за означенням 2.8).

Оскільки за наслідком 2.1, динамічні системи вигляду (2.1) топологічно еквівалентні, якщо топологічно еквівалентні їх відповідні лінійні частини систем, тоді одна система з іншої виходить за допомогою оберненої заміни координат лінійних частин систем.

Позначимо оператор диференціювання за напрямом векторного поля

f_1 символом $f_1 \frac{\partial}{\partial x}$, тоді при дифеоморфізмі $h(x) = Ix$ або $h^{-1}(y) = Iy$

запишемо

$$f_2(m_2) \frac{\partial}{\partial y} = f_2[h(m_1)] \frac{\partial}{\partial [h(x)]} = f_1(m_1) \frac{1}{h'(m_1)} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.10)$$

Позначимо вираз у формулі (2.10) $\frac{1}{h'(m_1)} = J_h^{-1}(m_1)$.

При заданому дифеоморфізмі $m_2 = h(m_1) = m_1$, тобто точки рівноваги обох систем співпадають. Нехай $A(m_1)$ та $B(m_1)$ матриці Якобі кожної системи.

З урахуванням наслідку (2.1) отримуємо

$$B(m_2) = A(m_1) J_h^{-1}(m_1). \quad (2.11)$$

Отже, якщо існує дифеоморфізм h , такий, що $J_h^{-1}(m_1) = I$, то з (2.11) маємо $A(m_1) = B(m_2)$, оскільки обернена одинична матриця дорівнює одиничній $I^{-1} = I$.

Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що виконуються умови теореми: системи локально дифеоморфні, існує дифеоморфізм h , такий, що $J_h^{-1}(m_1) = I$, але $A(m_1) \neq B(m_2)$. Через обернену заміну координат одна система з іншої виходить так: $f_2(m_2) = f_1(m_1) J_h^{-1}(m_1)$. За умов локальної дифеоморфності систем, похідна згаданого дифеоморфізму має переводити оператор лінійної частини першого поля в точці положення рівноваги в оператор лінійної частини другого поля в його точці положення рівноваги.

Отже $B(m_2) = A(m_1) J_h^{-1}(m_1) = A(m_1)$, за властивостями одиничної

квадратної матриці $I^{-1} = I$. Отримана суперечність, тому рівність матриць Якобі є достатньою умовою, щоб системи були локально дифеоморфними в околі точки положення рівноваги.

Теорему доведено.

Нехай існує дифеоморфізм h такий, що $J_h(m_0^1) = kI$, де $J_h(m_0^1)$ - матриця Якобі функції $h(m_0^1)$, обчислена в точці m_0^1 , I - одинична матриця, k - деяке число $k \neq 0$. У локально дифеоморфних системах з однаковою розмірністю при виконанні умов а) і б) можна довести певне співвідношення через матриці Якобі цих систем, яке є необхідною та достатньою умовою дифеоморфності.

Доведення аналогічне тому, яке представлено до теореми 2.3. Використовуються властивості обернених матриць. Якщо $J_h(m_0^1) = kI$, то

$$J_h^{-1}(m_0^1) = \frac{1}{k} I.$$

2.2.3. Інші властивості локальної дифеоморфності. Рівність матриць Якобі в теоремі 2.3, як необхідної і достатньої умови, переводить розгляд до рівності квадратних матриць.

Означення 2.9. Дві матриці називаються рівними, якщо їх порядок однаковий і відповідні елементи рівні [58].

Отже необхідно розглянути власні значення матриць на умову топологічної еквівалентності.

Наслідок 2.2. (до теореми 2.3). Рівність власних значень матриць Якобі, обчислених в околі точок положення рівноваги є необхідною умовою локальної топологічної еквівалентності систем.

Доведення. Наявний дифеоморфізм задає певні співвідношення між векторними полями динамічних систем як (2.1). Якщо матриці Якобі, обчислені в околі точки положення рівноваги є рівними, то рівні й їх

власні значення. Однак обернене не завжди вірне, оскільки рівність власних значень не означає, що рівні й ці матриці.

Наприклад, розглянемо матриці $A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1/3 & 4 \end{pmatrix}$. У них власні значення співпадають $\lambda = \{2, 3\}$, однак матриці A' і B' не є рівними.

Тому рівність власних значень матриць Якобі, обчислених в околі точок положення рівноваги є необхідною умовою топологічної еквівалентності дифеоморфних систем (для певних дифеоморфізмів, розглянутих вище).

Якщо матриці A і B подібні, тобто для деякої невинродженої матриці Q виконується рівність $B = Q^{-1}AQ$, то вони мають однакові характеристичні многочлени й їх власні значення співпадають. Відповідна теорема і її доведення представлені, наприклад, в [58].

2.3. Виявлення локальної орбітальної топологічної еквівалентності

Як зазначається в [4], поняття топологічної еквівалентності не повністю покриває структурно стійкі системи.

В [4] пропонується розглянути наступний приклад: нехай є векторне поле з замкненою фазовою кривою, наприклад, граничний цикл. Отже топологічно еквівалентна система теж зобов'язана мати граничний цикл з тим самим періодом. Таким чином, якщо достатньо мало змінити (термін «малого» змінювання векторного поля детально пояснюється у 1 розділі) векторне поле період теж може трохи змінитися, а отже цей період руху по циклу є неперервно змінюваним інваріантом, який називають модулем. Для того, щоб позбутися модуля, розглядають ще більш грубе поняття орбітальної топологічної еквівалентності.

Означення 2.10. Системи називаються орбітально топологічно еквівалентними в околі точок положення рівноваги, якщо існує гомеоморфізм деякого околу точки положення рівноваги векторного поля однієї системи в деякий окіл точки положення рівноваги другого і відображує локальні фазові криві одного поля в друге зі збереженням напрямку руху [4].

Відповідно до означення 2.10. необхідно встановити необхідний і достатній критерій локальної орбітально топологічної еквівалентності, за допомогою якого можна визначати локально структурно стійкі (грубі) системи відповідно до певних умов, наведених вище.

Теорема 2.4 (якщо існує дифеоморфізм h такий, що $J_h(m^1) = I$, де $J_h(m^1)$ - матриця Якобі функції $h(m^1)$, обчислена в точці m^1 , I - одинична матриця). У локально орбітально топологічно еквівалентних системах при виконанні умов а) і б) рівність матриць Якобі, обчислених в околі точок положення рівноваги є необхідною та достатньою умовою.

Доведення. Нехай існує дифеоморфізм h такий, що $J_h(m^1) = I$, де $J_h(m^1)$ - матриця Якобі функції $h(m^1)$, обчислена в точці m^1 , I - одинична матриця. Наявний необхідний і достатній критерій, який перетворює траєкторії однієї системи в околі деякої точки рівноваги в окіл деякої точки рівноваги іншої системи, представлений доведеною теоремою 2.3. Отже доведення необхідності та достатності рівності матриць Якобі зосереджується на умові збереження напрямку руху по траєкторіям.

Необхідність. Якщо матриці Якобі, обчислені в околі точок положення рівноваги рівні, тобто $A(m^1) = B(m^2)$, то співпадають їх характеристичний і мінімальний многочлени, відповідно до теореми, наведеної в [58, 59], оскільки ці матриці подібні. Подібність показується так: $A(m^1) = I^{-1}B(m^2)I$. Отже співпадають власні значення, за знаком яких визначається напрямок руху по траєкторії. Тому рівність матриць Якобі є

необхідною умовою, щоб співпадали напрямки руху по траєкторії, а з урахуванням доведення теореми 2.3. і умовою орбітальної топологічної еквівалентності.

Достатність. Нехай згаданий дифеоморфізм існує і напрямки руху по траєкторії в околі точки положення рівноваги співпадає, але $A(m^1) \neq B(m^2)$. Через обернену заміну координат одна система з іншої виходить так: $f_2(m^2) = f_1(m^1)J_h^{-1}(m^1)$. Похідна згаданого дифеоморфізму має переводити оператор лінійної частини першого поля в точці рівноваги в оператор лінійної частини другого поля в його точці рівноваги. Отже $B(m^2) = A(m^1)J_h^{-1}(m^1)$, тобто матриці $A(m^1) = B(m^2)$ мають бути подібними. Оскільки матриця Якобі дифеоморфізму h дорівнює I , як наведено вище, то $A(m^1) = B(m^2)I^{-1}$. За властивостями одиничної квадратної матриці $I^{-1} = I$, виходить, що $A(m^1) = B(m^2)$, оскільки інакше не може існувати наведений дифеоморфізм і співпадати напрямки руху по траєкторії. Отримана суперечність, тому рівність матриць Якобі є достатньою умовою, щоб системи були локально орбітально топологічно еквівалентними в околі точки положення рівноваги.

Теорему доведено.

Аналогічно можна довести і для випадку, якщо існує дифеоморфізм h такий, що $J_h(m_0^1) = kI$.

Приклад 2.1. Перевірити на орбітальну топологічну еквівалентність наступні системи: $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y + 5$.

Очевидно, що матриці Якобі рівні, напрямки руху по траєкторіям співпадає й дійсно достатньо за допомогою заміни координат перевести точку положення рівноваги одного векторного поля в точку положення рівноваги іншого векторного поля. Отже, наведені системи є орбітально топологічно еквівалентними.

Приклад 2.2. Перевірити на орбітальну топологічну еквівалентність наступні системи: $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y + 5$.

Матриці Якобі не рівні, напрямок руху по траєкторіям не співпадає, однак, дійсно достатньо за допомогою заміни координат перевести точку положення рівноваги одного векторного поля в точку положення рівноваги іншого векторного поля. Отже наведені системи не є орбітально топологічно еквівалентними.

2.4. Граничні за ентропією типи точок положення рівноваги на площині

Означення 2.11. Якщо виконується умова $E(p) = E^{\max}(p)$, тобто для деякої динамічної системи (2.1) ентропія максимальна, то точки положення рівноваги називаються граничними за ентропією.

Нехай для деякої системи (2.1) з $d = 2$, для лінеаризованої гіперболічної частини виконується (2.4) (а також виконується умова б), наведена вище), так, що ентропія досягає максимуму, тобто $E(p) = E^{\max}(p) = \ln d$ (відповідно до властивостей ентропії, наведених вище). Отже нормований вектор норм дотичних векторів такий: $p_1 = p_2 = 1/2$, тому експоненти Ляпунова кратні (рівні).

Нехай розглядаються такі випадки:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги асимптотично стійка за Ляпуновим, тип цієї точки – стійкий вузол;

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги нестійка за Ляпуновим, тип цієї точки – нестійкий вузол.

За функціоналом (2.5) ентропія $E(p) = E^{\max}(p)$, тобто завжди приймає максимальне значення для будь-якого часу t . Неважко

переконалися, що для системи (2.1) у багатовимірному просторі при гіперболічності та відсутності нуля наявне максимальне значення ентропії у функціоналі (2.5) відповідає виродженому вузловому типу точки положення рівноваги.

2.4.1. Максимальне значення ентропії для базису з власних векторів. Нехай, для спрощення, система (2.1) є лінійною з постійними параметрами $\dot{z} = Az$. Запишемо розв'язок для цієї лінійної системи у вигляді $z = C_1 e^{\lambda t} b_1 + C_2 e^{\lambda t} b_2$. Розв'язок у базисі b_1 і b_2 прийме вигляд: $z = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$, де $\xi_1 = C_1 e^{\lambda t}$, а $\xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$, які є пропорційними до $e^{\lambda t}$ [60]. Фазові траєкторії є променями, а фазовий портрет називається дикритичним вузлом: виродженим стійким вузлом (рис. 2.2), якщо виконується умова стійкого вузла (представлено у пункті 2.3) або виродженим нестійким вузлом (рис. 2.3), якщо виконується умова нестійкого вузла (представлено у пункті 2.3). За функціоналом (2.5) ентропія для цих випадків $E(p) = E^{\max}(p)$.

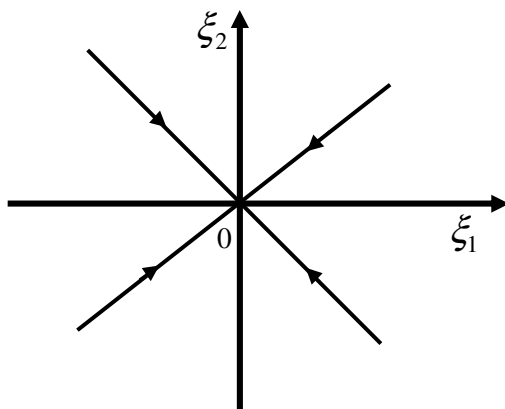


Рис. 2.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

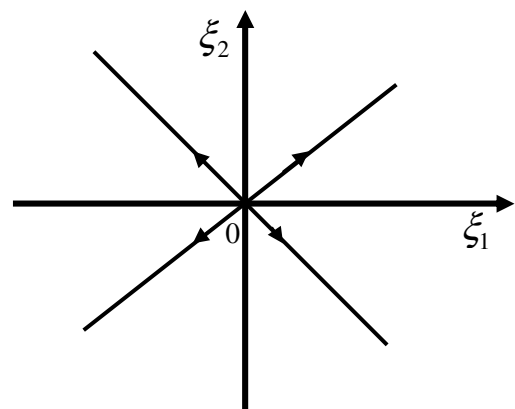


Рис. 2.3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

2.4.2. Максимальне значення ентропії для єдиного власного вектора. Нехай система (2.1) є лінійною з постійними параметрами. Для випадку існування єдиного власного вектора, запишемо розв'язок для цієї лінійної системи $\dot{z} = Az$ у вигляді: $z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda t} b_1 + C_2 e^{\lambda t} (b_1 t + b_2)$, де приєднаний вектор b_2 задовольняє системі $(A - \lambda I)b_2 = b_1$, де b_1 і b_2 - лінійно незалежні вектори, а постійна матриця A одержана з лінійної системи $\dot{z} = Az$, де I - одинична матриця.

Розв'язок у базисі b_1 і b_2 прийме вигляд: $z(t) = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$, де $\xi_1 = e^{\lambda t} (C_1 + C_2 t)$, а $\xi_2 = C_2 e^{\lambda t}$ [60].

У такому випадку фазовий портрет називається виродженим стійким вузлом [61] (рис. 2.4), якщо виконується умова стійкого вузла (представлено у пункті 2.3) або виродженим нестійким вузлом (рис. 2.5), якщо виконується умова нестійкого вузла (представлено у пункті 2.3).

За функціоналом (2.5) ентропія для цих випадків завжди приймає максимальне значення $E(p) = E^{\max}(p)$. Відповідно до властивостей ентропії, максимальне значення визначається з умови $E^{\max}(p) = \ln d$.

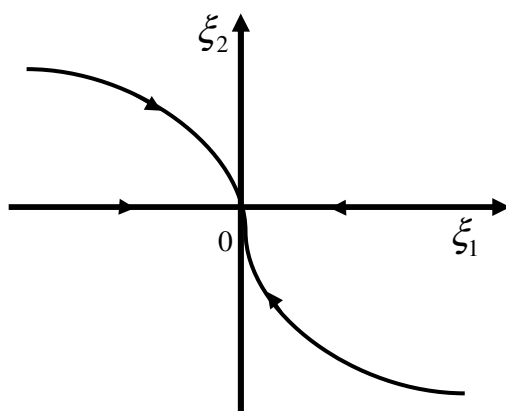


Рис. 2.4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

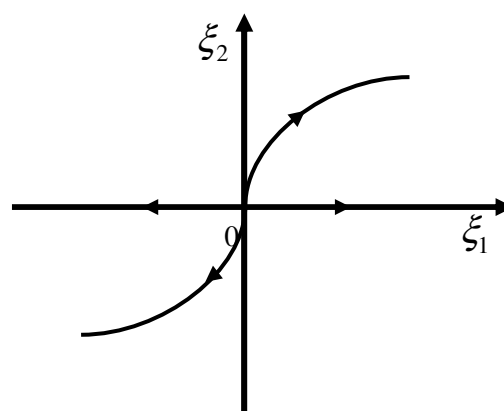


Рис. 2.5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

2.5. Багатовимірні простори

2.5.1. Точки положення рівноваги у багатовимірному просторі.

Коли досліджувана система двовимірною, то вона може мати точки положення рівноваги тільки наступних типів: вузол, сідло, центр і фокус. Коли фазовий простір d більшої розмірності, при $d > 2$, число типів таких точок вже більше і вони мають поєднувати в собі властивості наведених вище типів. Тому при більших розмірностях не вводяться нові назви точок положення рівноваги, а виділяються підпростори, наприклад, P^{S_1} , P^{S_2} , ..., P^{S_n} , в повному просторі P , $\dim P = \dim P^{S_1} + \dots + \dim P^{S_n}$, де S_1, \dots, S_n - номери підпросторів, а \dim - розмірність простору. Відмічається, що доцільніше розбивати на підпростори зі стійкими точками або нестійкими певного типу [62].

Поєднання властивостей двовимірної динамічної системи покажемо на загальному прикладі тривимірної системи.

2.5.2. Точки положення рівноваги тривимірної системи. Нехай система (2.1) представляється рівняннями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad i = \overline{1, d}. \quad (2.12)$$

Точки положення рівноваги системи (2.12) знаходяться з наступної системи рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \quad i = \overline{1, d}. \quad (2.13)$$

Як зазначено вище, у двовимірному фазовому просторі динамічна система має чотири типи точок положення рівноваги, які знаходяться з умови (2.13). При виконанні умов а) і б) пункту 2.2.1. у відповідному

фазовому просторі лінійна автономна динамічна система має два типи точок положення рівноваги: вузол і сідло.

При більшій розмірності фазового простору число типів точок положення рівноваги є значно більшим, але вони поєднують в собі властивості перелічених вище типів у двовимірному просторі [62].

Розглянемо систему (2.12) з тривимірним фазовим простором, тобто $d=3$ (у (2.13) теж $d=3$). Нехай x_s є точка положення рівноваги такої системи $x_s = (x_s^1, x_s^2, x_s^3)$. З лінеаризації системи (2.12) в околі цієї точки можна визначити тип цієї точки [62]. Нехай для малого вектора $z = x - x_s$ перепишемо систему (2.12) у вигляді:

$$\frac{dz}{dt} = Az, \quad (2.14)$$

де A - є постійною матрицею, $A = df/dx|_{x=x_s}$.

Розв'язок (2.14) шукається у вигляді:

$$z = z_0 e^{\lambda t} \quad (2.15)$$

Підставивши (2.15) у (2.14), отримується система рівнянь (лінійних) для коефіцієнтів $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)$: $\lambda z_0 = Az_0$. Умова існування розв'язку цієї системи знаходиться з наступного характеристичного рівняння:

$$|A - \lambda I| = 0, \quad (2.16)$$

де I - одинична матриця третього порядку

Рівняння (2.16) представляється наступним кубічним рівнянням: $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, яке має три корені. Оскільки розглядаються системи

лише з дійсними власними значеннями, то увага зосереджується на дійсних коренях, серед яких не має нулів.

Нехай всі три кореня дійсні та різні, тоді можливі наступні чотири випадки:

а) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$;

б) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$;

в) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$;

г) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Розглянемо три кореня для кожного з випадків а)-г): (λ_1, λ_2) і (λ_3) .

Випадок а) і випадок г) відповідають типам вузол, тільки в а) – стійкий вузол – стиснення у всіх трьох напрямках, а в г) – нестійкий вузол – розтягнення у всіх трьох напрямках.

Випадки б) і в) відповідають таким, відповідно, типам точок: сідло-вузол. Ці точки мають властивості за однією парою напрямків – вузла, а за іншою – сідла, причому пара напрямків з властивостями вузла може бути стійкою, як у випадку б) і нестійкою у випадку в).

2.6. Припущення для випадків існування нуля серед власних значень

Для аналізу стійкості нелінійних динамічних систем найбільш ефективним методом є другий (прямий) метод функцій О.М. Ляпунова [63-66]. Якщо динамічна система розглядається на компактному гладкому многовиді, то вказівка компактності многовиду гарантує, що розв'язки диференціальних рівнянь продовжуються необмежено [2, 4, 5, 62, 67]. При цьому головною проблемою залишається складання самої функції Ляпунова, яка дозволяє досліджувати стійкість точки положення рівноваги достатньо ефективно [33]. Більше того, при невизначеності значень

параметрів системи або її структури, часто необхідно побудова нової функції Ляпунова, що ускладнює й суттєво уповільнює проведення цього аналізу. Відсутність загального методу побудови функції Ляпунова, а також відповідного чисельного методу, доволі часто приводить до рутини.

Описана проблема виникає в задачах реконструкції динамічних систем таким чином, щоб її поведінка відповідала реальним експериментальним даним [2, 4, 5, 32, 68]. Також в задачах прогнозування [68], аналізу реконструйованої системи і поширенні знайдених властивостей на реальний процес [2, 4, 5, 68]. Особливо важливу значимість стійкість має для техніки [63-64, 69-70]. Стійке збереження заданого курсу руху має бути обов'язковим для корабля [63], літака [63], ракети [63], а також заданого режиму роботи турбіни [63], генератора [63], гіроскопічного компаса [63], супутникового гравіметра і т.п.

Акуратне означення і методи розв'язку даної задачі відносяться до О.М. Ляпунова [63-64]. У багатьох випадках, особливо для прикладних задач, стійкість досліджується за рівняннями першого наближення [63-64]. Це пояснюється простотою цього методу. Розвиток різних технік аналізу досліджуваних систем дозволяє надійно визначати не тільки перші лінійні члени, при розкладанні в ряд Маклорена, а й другого, і більш високого порядку малості.

При дослідженні реальних систем їх розмірність, в основному, більше двох, причому часто зустрічаються експоненти Ляпунова, рівні нулю (корінь характеристичного рівняння). Це критичний випадок, коли дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, призводить до того, що провести дослідження на стійкість за першим наближенням неможливо [63]. Але при розгляді наближень не тільки першого, а й другого і більш високого порядків малості, виникає питання про визначення умов стійкості з них.

Тому є важливим встановлення умов, при виконанні яких можна

зробити висновок про стійкість динамічних систем на компактному гладкому многовиді наближеннями різного порядку малості.

Далі наводиться твердження і досліджуються на стійкість точки положення рівноваги на конкретних прикладах динамічних систем на основі методу функцій Ляпунова та твердження.

Твердження 2.1. Нехай хоча б одне власне значення матриці Якобі в околі точки положення рівноваги, дійсна частина якого дорівнює нулю, а всі інші власні значення менше нуля. Якщо відповідна дійсна частина власного значення матриць у членах ряду другого або більш високого порядків малості (якщо попередні теж нульові) від'ємна, то незбурений рух стійкий за Ляпуновим.

Пропонується розглянути наступні приклади.

Приклад 2.1. Дослідити на стійкість точку положення рівноваги $x \equiv y \equiv 0$ системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3; \end{cases}$$

I. *За другим методом Ляпунова.* Нехай $V = x^2 + y^2$ - строго додатна функція і повна похідна $dV/dt = 2x(y - 2x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -2(2x^4 + 3y^4)$ - строго від'ємна функція (при $x = y \neq 0$). За теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість, точка положення рівноваги $x \equiv y \equiv 0$ даної системи асимптотично стійка.

II. Застосування припущення 2.1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \{\pm i\};$

$V_2 = \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2}^{V_2} = \{0\}; \quad V_3 = \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2}^{V_3} = \{-2, -3\}.$ Точка $x \equiv y \equiv 0$ стійка.

Приклад 2.2. Дослідити на стійкість точку положення рівноваги $x \equiv y \equiv 0$ системи:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 y^2, \\ \dot{y} = -x - 2x^2 y^3; \end{cases}$$

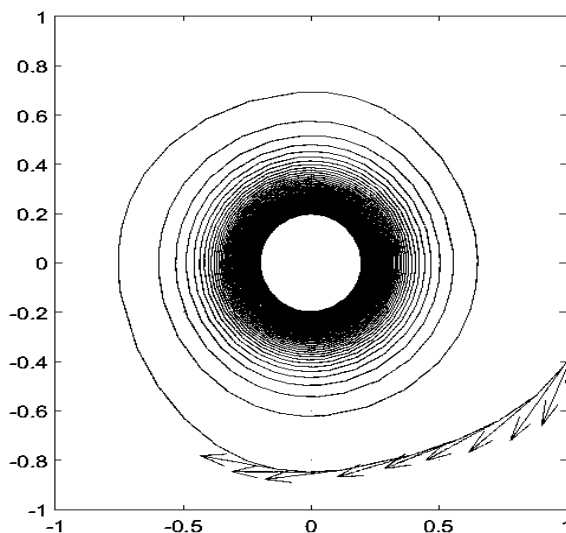
I. За другим методом Ляпунова.

Нехай $V = ax^2 + by^2$, $a > 0, b > 0$ - строго додатна функція і повна похідна

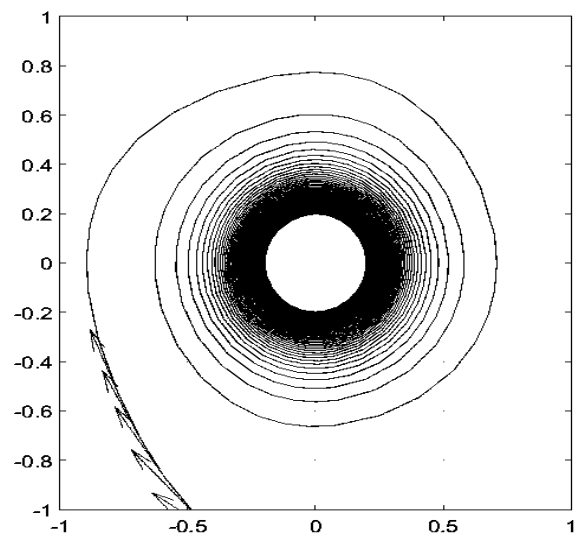
$$\begin{aligned} dV/dt &= 2ax(y - x^3 y^2) + 2by(-x - 2x^2 y^3) = 2axy - 2ax^4 y^2 - 2bxy - 4bx^2 y^4 \\ &= xy(2a - 2b) - x^2 y^2(2ax^2 + 4by^2). \end{aligned}$$

При $a = b$, $dV/dt = -2ax^2 y^2(x^2 + 2y^2) < 0$ - строго від'ємна функція (при $x = y \neq 0$). За теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість, точка положення рівноваги $x \equiv y \equiv 0$ даної системи асимптотично стійка.

Для прикладу 2.2. показані фазові портрети системи при різних початкових умовах (рис. 2.6).



а)



б)

Рис. 2.6. Початкові умови: а) [1;1], б) [1.1;-2]

II. Застосування припущення 2.1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \{\pm i\};$

$V_2 = \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2}^{V_2} = \{0\}; V_3 = \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2}^{V_3} = \{0,0\}$ - не дає відповіді.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі розглядається задача дифеоморфності (топологічної та орбітально топологічної еквівалентності динамічних систем). Розглядаються граничні за ентропією випадки типів точок положення рівноваги.

Досліджується ентропія для нормованого вектора евклідових норм дотичних векторів. Доводиться необхідна і достатня умова локальної топологічної та орбітально топологічної еквівалентності систем при заданому дифеоморфізмі. Допускається, що матриця Якобі, обчисленої в околі точки положення рівноваги системи, серед власних значень не має нульових і ці власні значення не знаходяться на уявній вісі.

Розглядаються як двовимірні динамічні системи, так і більшої розмірності. Показано, що при розмірності системи більше двох, точки положення рівноваги поєднують властивості точок систем у двовимірному просторі.

Основним результатом цього розділу є представлення функціоналу (вперше) динаміки норм дотичних векторів, а також доведення необхідності та достатності умови локальної дифеоморфності (грубості, робастності, структурної стійкості) динамічних систем. Розгляд класифікації точок положення рівноваги для розмірності фазового простору динамічних систем більше двох, а також розгляд припущення для

випадків існування нуля серед власних значень та формулювання відповідного твердження.

З отриманих результатів випливає, що необхідну і достатню умову можна використати для реконструкції локально структурно стійких (робастних) динамічних систем, які описують процеси різних областей природознавства.

Результати другого розділу опубліковано в статтях та тезах доповідей [48, 49, 51, 57, 62, 68] і доповідалися на конференціях та наукових семінарах відділу дистанційних методів та перспективних приладів Інституту космічних досліджень НАН Україна та ДКА України, в Інституті математики НАН України, на Всеукраїнських семінарах «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» Київського національного університету імені Тараса Шевченка (факультет комп'ютерних наук та кібернетики).

РОЗДІЛ 3

РОЗМІРНІСТЬ КАПЛАНА-ЙОРКІ ТА ЛОКАЛЬНА ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ

У цьому розділі сумісно досліджується розмірність Каплана-Йоркі та локальна топологічна еквівалентність. Наявність великої кількості робіт, присвячених дослідженню зв'язків між експонентами Ляпунова та розмірності Каплана-Йоркі, яку називають ляпуновською розмірністю, робить актуальним і цікавим напрямом дослідження розмірності та її зв'язків з топологічною еквівалентністю систем.

3.1. Розмірність Каплана-Йоркі та її зв'язок з іншими розмірностями

Під метричною розмірністю зазвичай розуміється розмірність Хаусдорфа-Безиковича [25], заснована на покритті деякої досліджуваної множини точок гіперкуба в фазовому просторі, причому підрахунок цих гіперкубів вимагає дуже великих обчислювальних можливостей [25]. Тому використовується ряд означень зі спрощеннями, які допускають чисельний розрахунок [25]. Оцінкою зверху для хаусдорфової розмірності вважається гранична ємність [24, 25], яка є чисто метричною. Ємність множини є спрощеним поняттям хаусдорфової розмірності [25], яка обчислюється за формулою:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Нехай M покривається однаковими d –вимірними кубами з ребром

ε , тоді $N(\varepsilon)$ - буде кількістю цих кубів.

В динамічних системах необхідно враховувати ймовірнісну міру, тобто таку частоту, з якою фазова траєкторія відвідує різні частини многовиду. Однією з таких оцінок є інформаційна розмірність [25, 27]. Отже нехай M покривається однаковими d -вимірними кубами з ребром ε , тоді знайдемо ймовірність попадання точки у кожний куб p_i та отримаємо розподіл цих ймовірностей. При введенні ентропії Шеннона для цього розподілу $E(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i$, як зазначається в [25], отримаємо інформаційну розмірність, яка визначається за формулою:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}}.$$

Для випадку рівномірного розподілу ймовірностей, тобто $p_i = 1/N$, $D_I = D_C$ [25], а при будь-якому іншому розподілі ентропія буде менше, згідно з властивостями ентропії, наведених вище (у 2 розділі), отже виконуватиметься наступна нерівність: $D_I < D_C$ [25].

Грасбергер і Прокаччі показали в [27], що розмірність, названа кореляційною, враховує спільну ймовірність попадання пари точок в кожен елемент розбиття і повинна бути чисельно менше, ніж інформаційна розмірність. Узагальнена розмірність, яка описується ентропією Реньї деякого порядку, об'єднує ємність, інформаційну та кореляційну розмірності [24,25,27,28]. Також виділяється хаусдорфова розмірність ядра, ємність ядра [25] та ін. Однією з найбільш часто використовуваних, при дослідженні динамічних систем, є розмірність за Ляпуновим [25,23,29], запропонована Капланом і Йоркі [23,29], яка встановлює співвідношення між фрактальною розмірністю, інформаційною ентропією і експонентами Ляпунова [25, 23]. Автор додержується терміна

«експоненти Ляпунова», щоб підкреслити їх значення середнього експоненціального темпу дивергенції (конвергенції) сусідніх орбіт в фазовому просторі. Каплан і Йоркі використовували числа Ляпунова, від яких можна перейти до експонент Ляпунова. Для регулярних атракторів ляпуновська розмірність збігається з топологічною розмірністю [25].

Представимо впорядкування спектра експонент Ляпунова в порядку їх зменшення: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, тоді, як зазначено в [24], ляпуновська розмірність Каплана-Йоркі має вигляд, представлений формулою (3.1):

$$D_{KY} = \zeta + \frac{1}{\lambda_{\zeta+1}} \sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i, \quad (3.1)$$

де ζ визначається з наступних умов: $\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\zeta+1} \lambda_i < 0$.

Підкреслимо, що ζ - це кількість перших невід'ємних експонент Ляпунова в спектрі, сума яких ще є невід'ємною; якщо експоненти Ляпунова всі негативні, то $\zeta = 0$, відповідно до формули 3.1.

З формули Каплана-Йоркі отримуються для регулярних атракторів наступні значення розмірності, які, як стверджується в [25], співпадають з топологічною розмірністю відповідних множин (у дужках наводиться сигнатура спектра експонент Ляпунова): $D_{KY} = 0$ для стану рівноваги $(-, -, -, -, \dots)$; $D_{KY} = 1$ для граничного циклу $(0, -, -, -, \dots)$; $D_{KY} = 2$ для двовимірного тору $(0, 0, -, -, \dots)$; $D_{KY} = N$ для N - вимірного тору $(0, 0, \dots, 0, -, \dots)$. Розглядається в [25] також динамічні системи з постійним розтягуванням і стисненням, для яких $D_{KY} = D_C$.

Щоб показати це наглядно (рис. 3.1), в [25] пропонується розглянути двовимірне відображення, яке характеризується постійним розтягуванням в $e^{\lambda+}$ і стисненням в $e^{|\lambda-|}$ раз на кожній ітерації, де $\lambda+$ і $\lambda-$ є додатною та

від'ємною експонентою Ляпунова, відповідно.

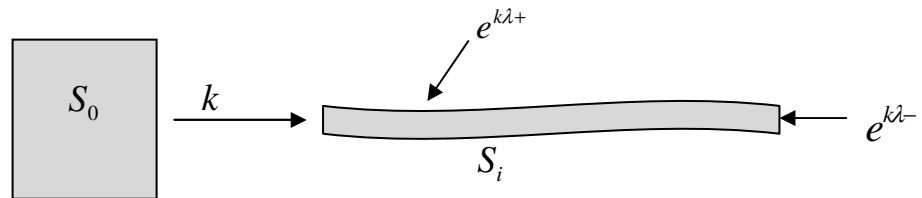


Рис. 3.1. Для доведення $D_{KY} = D_C$ для двовимірного відображення з постійним розтягуванням і стисненням

Дійсно, можна встановити, що за k ітерацій відображення, цей одиничний квадрат, за зазначених умов, перетвориться у тонку і довгу стрічку, яка може вигинатися й складатися (це показано на рисунку 3.1) [25].

На k -й ітерації покриємо цю стрічку, площею S_k за допомогою N квадратиків з ребром $\varepsilon = e^{k\lambda^-}$, де $N(\varepsilon) = e^{k(\lambda^+ + |\lambda^-|)}$. При $k \rightarrow \infty$ ребро квадрата $\varepsilon \rightarrow 0$, отже можна знайти ємність такої граничної множини:

$$D_C = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon^{-1}} =$$

$$= \frac{\ln e^{[k(\lambda^+ + |\lambda^-|)]}}{\ln (e^{k\lambda^-})^{-1}} = \frac{k(\lambda^+ + |\lambda^-|)}{k|\lambda^-|} = \frac{\lambda^+ + |\lambda^-|}{|\lambda^-|} = 1 + \frac{\lambda^+}{|\lambda^-|} = D_{KY}.$$

В [30] надається поняття локальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини в точці та зазначається, що вона є показником «масивності» множини, «компактності» його точок або ж степені

розривності й за своєю природою не визначає внутрішньої будови множини, а виступає як зовнішня його властивість, тобто, будучи властивістю локальною, характеризує множину в цілому.

При застосуванні терміна «фрактальна розмірність» деякої множини [30] зазвичай мається на увазі умова, що топологічна розмірність не співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

У [30] наведена наступна теорема: нижня грань розмірності Хаусдорфа-Безиковича для всіх метрик компакта E дорівнює його топологічній розмірності. У [30] також наведений наслідок про справедливість зв'язку топологічної розмірності та розмірності Хаусдорфа-Безиковича компакта E , який представляється формулою: $\dim E \leq \alpha(E)$, де $\dim E$ - топологічна розмірність, $\alpha(E)$ - розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

В [16] описується, що фрактальні розмірності нерегулярних кривих і поверхонь виявилися корисними фізичними поняттями, наприклад, забезпечивши корисний показник для характеристики енергетичного каскаду і вихрового розтягування в повністю розвиненій турбулентності; досліджуються потоки автономних дисипативних систем. Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь Лоренца. За припущенням Х. Морі [16], існує зв'язок між фрактальною розмірністю атрактора і його спектром експонент Ляпунова. Але чисельні розрахунки в [17] підтримують гіпотезу Дж. Каплана та Дж. Йоркі [18].

У роботі [19] розглядаються геометричні та деякі топологічні особливості систем звичайних диференціальних рівнянь Ресслера, Лоренца, гіперхаосу Ресслера та ін., глобальні властивості Вільямса [20] і Шоу [21], які «розкладають» фрактальну структуру до простих згорнутих листів. У [21] також наводяться кроки до класифікації дивних атракторів. Зазначається, що дослідження топології дивних атракторів зводиться до топології розв'язків диференціальних рівнянь, які керують потоком. Однак

розмірність Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних систем не досліджується.

В [22] було доведено, що змістовна концепція розмірності дивних атракторів може бути визначена в термінах експонент Ляпунова, яку називають ляпуновською або розмірністю за Ляпуновим. Розглядається ляпуновська розмірність для «хаотичних» систем різницевих рівнянь, які мають вигляд:

$$X_k = f(X_{k-1}), \quad (3.2)$$

де $f: B \rightarrow B$, B - компактна n - вимірна множина, $f(B) \subset \text{interior}(B)$, зокрема $f^{k+1}(B) \subset f^k(B)$, а атрактор для (3.2) визначається як $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(B)$; X_k є вектором.

У Дж.Д. Фармера та ін. в [23] розглядаються розмірності різних означень, причому розглядається динамічна система як різницевих рівнянь (3.2), так і звичайних диференціальних рівнянь (з неперервним часом). Зазначається, що означення розмірності мають два типи: одні залежать від метричних властивостей, а інші – від частоти з якою типова траєкторія відвідує різні області атрактора. Стверджується, що всі залежні від частоти розмірності приймають одне і те ж значення, яке називають «розмірністю природної міри», а всі метричні розмірності приймають загальне значення, яке називають фрактальною розмірністю; розмірності, які залежать від частоти, дорівнюють розмірності за Ляпуновим, яку, при відомих рівняннях, набагато легше обчислити, ніж будь-яку іншу розмірність. В [23] надається перевага ляпуновській розмірності, яка є більш фізично доречною, ніж інші розмірності.

Дж.Д. Фармер та ін. в [23] показали, що інформаційна і Ляпунова розмірності рівні, причому виникає ентропія дискретного розподілу

ймовірностей p_i , $i = \overline{1, d}$, кількість яких дорівнює кількості експонент Ляпунова. На сьогодні ця ентропія не досліджувалась, зокрема не було виведено загальний вигляд цього дискретного розподілу ймовірностей.

В [23] показано, що ляпуновська розмірність може бути визначена для двовимірного випадку наступним виразом:

$$D_I = D_{KY} = 1 + \frac{H(\alpha)}{\alpha \ln(1/\lambda_1) + \beta \ln(1/\lambda_2)}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Ця рівність також зазначається в [24], де $H(\alpha)$ - ентропія.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то

$$\alpha = \beta = 0,5; \quad D_I = D_{KY} = 1 + \frac{H(\alpha)}{p_1 \ln(1/\lambda_1) + p_2 \ln(1/\lambda_2)};$$

$$D_I = D_{KY} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)} = D_C.$$

Таким чином, для даного випадку, є рівність $D_I = D_{KY} = D_C$, де D_C - ємність, D_I - інформаційна розмірність [24].

В [25] також наведена коротка характеристика різних розмірностей і розглядаються співвідношення між ними. Поняття розмірності необхідно для характеристики властивостей динамічної системи, яка показує загальну інформацію, необхідну для вказівки позиції точки із заданою точністю, наприклад на аттракторі [23]. Оцінкою нижньої межі кількості змінних, що визначають динаміку системи, є фрактальна розмірність [24].

У статті [26] зазначається, що основними числами, які характеризують «хаотичну» поведінку є наявність додатних експонент

Ляпунова і нецілочисельної метричної (фрактальної) розмірності. Це поняття набуло розвитку і для оптичного її вимірювання, використавши аналогові пристрої [24], наприклад, для деяких простих задач, таких як двовимірне відображення Пуанкаре [24].

В [24] також описується оптична інтерпретація кореляційного інтеграла і пропонується схема експериментальної установки. Таким чином розмірність за Ляпуновим і дослідження взаємозв'язків з іншими розмірностями має важливе прикладне застосування.

Основною проблемою залишається вибір тієї розмірності, яка досить ефективно відображає структуру досліджуваної динамічної системи (заданої системою диференціальних рівнянь), наприклад, на компактному гладкому многовиді класу C^σ , $\sigma \geq 2$. Зазначимо, що компактність многовиду гарантує [4], що рішення диференціальних рівнянь продовжуються необмежено.

Описана проблема виникає в задачах реконструкції динамічних систем, при якій її поведінка відповідає реальним експериментальними даними [4]. Також в задачах прогнозування часових рядів [68], аналізу реконструйованої системи і поширенні знайдених властивостей на реальний процес [2,48,68], оцінювання розмірності фазового простору (кількості експонент Ляпунова) [27]. Обчислення розмірності за Ляпуновим і дослідження взаємозв'язків з іншими розмірностями має важливе прикладне застосування для прогнозування геомагнітних індексів, які є невід'ємною частиною космічної погоди [68].

В [23] показано, що при аналізі ляпуновської та інформаційної розмірностей виникає ентропія нормованого вектора норм дотичних векторів. З такими ж властивостями ентропія розглядалася в [48, 51]. Однак питання розмірності Ляпунова для локально топологічно та орбітально топологічно еквівалентних динамічних систем вимагає подальшого розгляду.

3.2. Рівність розмірності Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних динамічних систем

3.2.1. Постановка задачі. Нехай M - компактний гладкий многовид класу C^σ , $\sigma \geq 2$ розмірності фазового простору d . Нехай є автономна динамічна система (3.3) звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), задана векторним полем f_i на компактному гладкому многовиді M :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad i = \overline{1, d}. \quad (3.3)$$

де f_i и df_i/dx_i - визначені та неперервні на множині $\{t \in [t_0, +\infty), x_i \in M\}$, $i = \overline{1, d}$. Представлені обмеження гарантують існування та єдиність розв'язку $x_i(t)$ задачі Коші при будь-яких початкових умовах. Многовид M локально гомеоморфний деякій області Евклідового простору \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ (розмірність M приймається рівною розмірності простору, $\dim M = d$), що було показано у другому розділі, виходячи з означення метричного простору [54]. Нехай f_i - нелінійна вектор-функція класу гладкості C^σ , $\sigma \geq 2$.

Ставиться задача виявлення рівності розмірності Каплана-Йоркі для дифеоморфних (топологічно еквівалентних та орбітально топологічно еквівалентних) динамічних систем вигляду (3.3).

3.2.2. Доведення рівності розмірності Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних систем. При наявному дифеоморфізмі, показаному в теоремі 2.3, необхідною умовою (властивістю) локальної топологічної еквівалентності є рівність матриць Якобі динамічних систем. Отже виникають наступні наслідки з цієї теореми.

Наслідок 3.1. Якщо рівні аналітичні вирази матриць Якобі динамічних систем вигляду (3.3), то розмірність Каплана-Йоркі для цих систем співпадає.

Доведення. За означенням розмірності Каплана-Йоркі, вона залежить від експонент Ляпунова, а отже і від норм дотичних векторів.

Для системи (3.3) еволюція дотичного вектора $r(x_0, t)$ в просторі дотичних на $x(t)$ представляється лінеаризацією рівняння (3.3):

$$\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t), \quad (3.4)$$

де $J = df/dx$ є матрицею Якобі векторного поля f . Розв'язком лінійного неавтономного рівняння (3.4) є

$$r(x_0, t) = A^t r(x_0, 0), \quad (3.5)$$

де A^t є лінійним оператором, який відображує дотичний вектор $r(x_0, 0)$ в $r(x_0, t)$.

Середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) дотичного вектора $r(x_0, t)$ знаходиться за формулою

$$\lambda(x(0), r(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|}, \quad (3.6)$$

де $\|r(x_0, t)\|$, $\|r(0)\|$ є нормами Ріманової метрики в загальному вигляді, однак, якщо система на компактному гладкому многовиді, то останній не відрізняється локально від такої ж системи на \mathbb{R}^d , що дає можливість розглядати евклідову норму.

Крім того, є d ортонормальних векторів e_i на $r(x_0, t)$, $i = \overline{1, d}$. Тобто є d норм дотичних векторів $\|r(x_0^i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$, які позначимо як $\|r'_i\|$, $i = \overline{1, d}$, для яких λ прийматиме значення $\lambda_i(x(0)) = \lambda(x(0), e_i)$, які можна впорядкувати за зменшенням. Ці значення λ_i є спектром експонент Ляпунова, $i = \overline{1, d}$. При використанні натурального логарифму в формулі (3.6), експоненти Ляпунова мають одиницю вимірювання «нат/одиноці вимірювання часу» для динамічної системи, а якщо використовується логарифм з основою 2, то - «біт/одиноці вимірювання часу».

Для рівності розмірності Каплана-Йоркі динамічних систем (3.3) у вузькому сенсі, необхідно і достатньо, щоб співпадали експоненти Ляпунова. Отже, необхідним і достатнім є рівність аналітичних виразів матриць Якобі таких систем, як (3.3).

У широкому сенсі, рівність розмірності Каплана-Йоркі динамічних систем (3.3) можлива і не тільки, коли експоненти Ляпунова співпадають, а і коли знайдеться таке число $\eta > 0$, що впорядкований вектор $\lambda^l = \eta^l \lambda^1$, $l = 2, 3, \dots$, де l це порядковий номер системи, для якої виконується це співвідношення.

Наслідок 3.1 доведено.

Наслідок 3.2. Якщо рівні локальні матриці Якобі динамічних систем вигляду (3.3), (а отже і локально орбітально топологічно еквівалентні), то розмірність Каплана-Йоркі для цих систем співпадає.

Доведення очевидне, оскільки було доведено, що при однакових матрицях Якобі системи є локально орбітально топологічно еквівалентні, а отже за знаком експонент Ляпунова можна визначити напрямок руху по траєкторії. Тому такі системи мають однакову розмірність Каплана-Йоркі.

А отже має співпадати і гранична середня ентропія, яка була введена раніше.

3.3. Розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією та інших типів точок положення рівноваги на площині

Вище, у 2 розділі, у пункті 2.4. наведене означення 2.10, за яким встановлюється, якщо виконується умова $E(p) = E^{\max}(p)$, тобто для деякої динамічної системи (3.3) ентропія максимальна, то точки положення рівноваги називаються граничними за ентропією.

Нехай для деякої системи (3.3) з $d = 2$, яка є гіперболічною, а також виконується умова б), наведена в 2 розділі, так, що ентропія досягає максимуму, тобто $E(p) = E^{\max}(p) = \ln d$ (відповідно до властивостей ентропії, наведених вище). Отже, нормований вектор норм дотичних векторів такий: $p_1 = p_2 = 1/2$ (експоненти Ляпунова є кратними (рівними)).

Нехай є такі випадки для коренів характеристичного рівняння системи (для точки положення рівноваги):

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги асимптотично стійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – стійкий вузол (дискритичний вузол).

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги нестійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – нестійкий вузол. У даному випадку порушується умова компактності, отже такі динамічні системи та їх розмірність не розглядається.

Для випадку а) розмірність Каплана-Йоркі завжди дорівнює нулю. У цьому легко переконатися, адже ζ , за формулою (3.1), визначається з наступної умови: $\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0$, з якої $\zeta = 0$, як і сам вираз теж дорівнює нулю.

У прикладі 3.1. показано, що у деяких випадках експоненти Ляпунова збігаються з коренями характеристичного рівняння, одержаного з лінеаризації заданої системи в нулі.

Приклад 3.1. Розглянемо наступну динамічну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 - 2x_1^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - 3x_2^3; \end{cases}$$

Матриця Якобі має наступний вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} -2 - 6x_1^2 & 0 \\ 0 & -2 - 9x_2^2 \end{pmatrix}$$

У статті [71] представлений метод обчислення експонент Ляпунова для систем ЗДР, за яким одержимо такі результати:

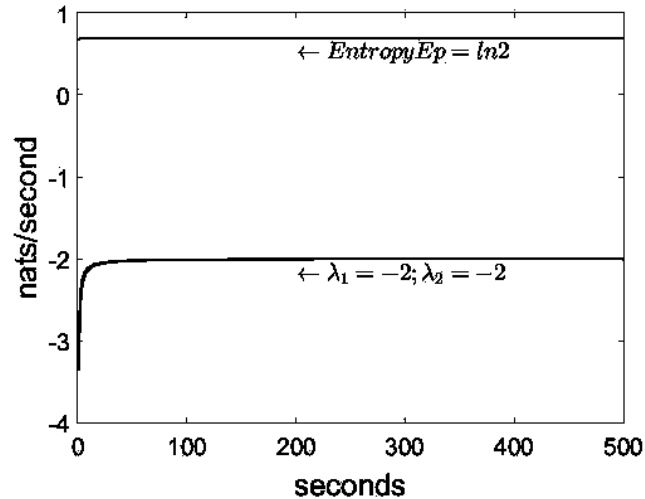


Рис. 3.2. Спектр експонент Ляпунова для прикладу 3.1. з ентропією

Розрахунки на рисунку 3.2. одержані при таких умовах: вектор початкових значень $x(0) = (0,0)$, інтегрування за методом Рунге-Кутти, час від 0 з кроком 1. На рис. 3.2. також розрахована середня ентропія, представлена в другому розділі.

в) різні, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги

асимптотично стійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – стійкий вузол, не є граничним за ентропією.

Для випадку в) розмірність Каплана-Йоркі завжди дорівнює нулю. За формулою (3.1) ζ визначається з наступної умови: $\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0$, з якої $\zeta = 0$, як і сам вираз теж дорівнює нулю.

Приклад 3.2. Розглянемо наступну динамічну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_1^2 x_2^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 - x_1^3 x_2^2; \end{cases}$$

Матриця Якобі має наступний вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - 4x_1 x_2^3 & -6x_1^2 x_2^2 \\ -3x_1^2 x_2^2 & -2 - 2x_1^3 x_2 \end{pmatrix}$$

Розрахунки на рисунку 3.3. одержані при таких умовах: вектор початкових значень $x(0) = (0,0)$, інтегрування за методом Рунге-Кутти, час від 0 до 500 з кроком 1.

На рис. 3.3. також розрахована середня ентропія, яка представлена в другому розділі. Обчислимо експоненти Ляпунова за методом, представленим у статті [71] та отримаємо такі результати на рис. 3.3.

Твердження 3.1. Для динамічних систем (1), у яких точка положення рівноваги – багатовимірний вузол (дикритичний вузол), стійкий за Ляпуновим, розмірність Каплана-Йоркі співпадає з топологічною розмірністю і дорівнює нулю.

Отже у випадку а) та в) розмірність Каплана-Йоркі співпадає з

топологічною розмірністю. Доведення очевидне.

г) різні, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги нестійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – сідло.

Для випадку г) розмірність Каплана-Йоркі $D_{KY} = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$. Отже коли

$\lambda_1 = |\lambda_2|$, тоді $D_{KY} = 2$.

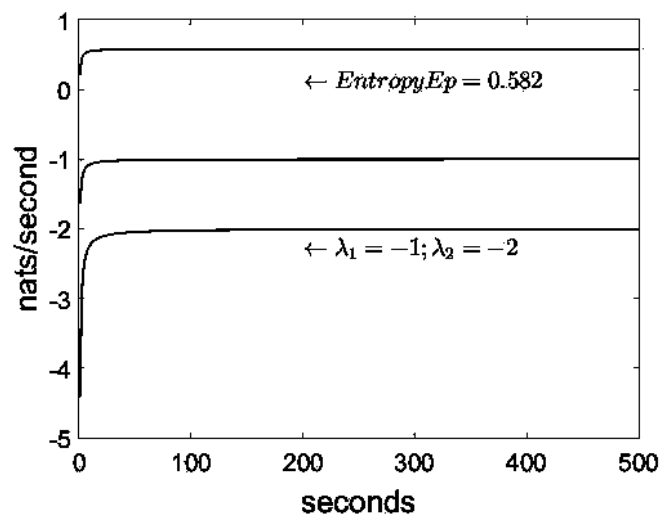


Рис. 3.3. Спектр експонент Ляпунова для прикладу 3.2. з ентропією

Якщо виконується рівність $\lambda_1 = \vartheta |\lambda_2|$, де $\vartheta > 0$, тоді $D_{KY} = 1 + \vartheta$.

Приклад 3.3. Розглянемо наступну динамічну систему:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_1^2 x_2^3, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_2 - x_1^3 x_2^2; \end{cases}$$

Ця система відрізняється від прикладу 3.4. знаком коефіцієнта 2 у другому рівнянні. Матриця Якобі має наступний вигляд:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - 4x_1x_2^3 & -6x_1^2x_2^2 \\ -3x_1^2x_2^2 & 2 - 2x_1^3x_2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо експоненти Ляпунова за методом, представленим у статті [71] та отримаємо такі результати (рис. 3.4)

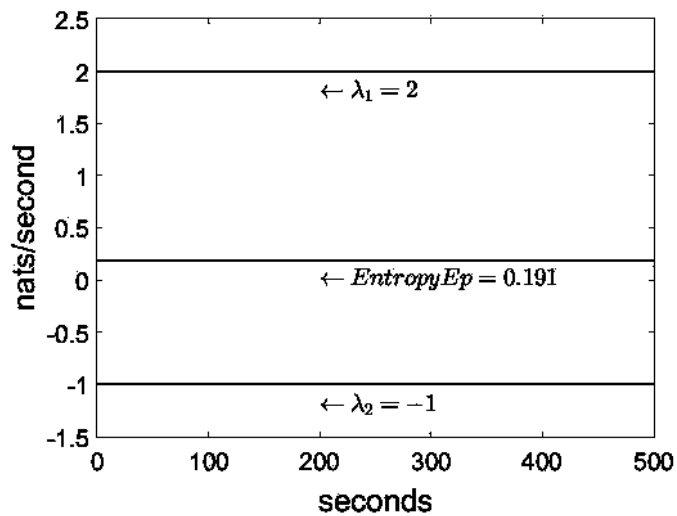


Рис. 3.4. Спектр експонент Ляпунова для прикладу 3.3. з ентропією

Розрахунки на рисунку 3.4. одержані при таких умовах: вектор початкових значень $x(0) = (0,0)$, інтегрування за методом Рунге-Кутти, час від 0 з кроком 1. На рис. 3.4. також розрахована середня ентропія, яка представлена в другому розділі.

Означення 3.1. (А.Ф. Турбин, [30]) Множина M називається фрактальною (фракталом) у вузькому сенсі, якщо розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(M)$ не є цілочисельною, тобто є дробовим числом.

Теорема 3.1. (А.Ф. Турбин, [30]) Нижня границя розмірності Хаусдорфа-Безиковича для всіх метрик компакта M дорівнює його топологічній розмірності.

Означення 3.2. (А.Ф. Турбин, [30]) Множина M називається фрактальною (фракталом) у широкому сенсі, якщо його топологічна

розмірність не співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, тобто $\alpha_0(M) > \dim M$.

Отже, розуміючи фрактальність у вузькому сенсі, на основі наведених означень і теореми 3.1, дійсно для випадків а), в) розмірність Каплана-Йоркі співпадає з топологічною розмірністю. Зауважимо, що топологічна розмірність є цілим числом.

Якщо виконується нерівність $\lambda_1 < |\lambda_2|$, тоді для розмірності Каплана-Йоркі виконується нерівність $1 < D_{KY} < 2$.

3.4. Розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією та інших типів точок положення рівноваги у тривимірному просторі

Для граничних за ентропією точок положення рівноваги, тобто $E_p = E_p^{\max} = \ln 3$, розглянемо наступні випадки.

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 < 0$ - у цьому випадку точка положення рівноваги асимптотично стійка за Ляпуновим. Тип цієї точки – стійкий вузол-вузол-вузол (стійкий вузол).

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$ - не розглядається.

Для випадку а) розмірність Каплана-Йоркі завжди дорівнює нулю. У цьому легко переконатися, адже ζ , за формулою (3.1), визначається з наступної умови: $\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0$, з якої $\zeta = 0$, як і сам вираз теж дорівнює нулю.

Нехай всі три кореня характеристичного многочлена для лінеаризованої системи до системи (3.3) дійсні та різні, тоді можливі наступні чотири випадки:

а) $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$;

б) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$;

в) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$;

$$\text{г) } 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Тепер розіб'ємо три кореня для кожного з випадків а)-г). Випадок а) і випадок г) відповідають типам вузол-вузол, тільки в а) – стійкий вузол-вузол (якщо для кожного розбиття співпадають типи точок, то слід називати без повторів, наприклад, для даного випадку – стійкий вузол), а в г) – нестійкий вузол-вузол (не розглядається). Випадки б) і в) відповідають таким, відповідно, типам точок: вузол-сідло і сідло-вузол (ці точки можна назвати сідло-вузол: причому пара напрямків з властивостями вузла може бути стійкою, як у випадку б) і нестійкою у випадку в).

За твердженням 3.1 розмірність Каплана-Йоркі для випадку а) дорівнює нулю.

Для випадку б) розмірність Каплана-Йоркі $D_{KY} > 1$, а для в) $D_{KY} > 2$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі розглядається умова рівності розмірності Каплана-Йоркі для топологічно еквівалентних і орбітально топологічно еквівалентних динамічних систем, як (3.3). Доведено наслідки з теорем 2.3 і 2.4 другого розділу про рівність розмірності Каплана-Йоркі.

Показано, якщо у динамічній системи точка положення рівноваги багатовимірний стійкий вузол (у загальному випадку), то розмірність Каплана-Йоркі завжди дорівнює нулю, що співпадає з топологічною розмірністю, про що сформульовано твердження 3.1. У цьому розділі показані співвідношення розмірності Каплана-Йоркі з іншими розмірностями. Досліджується розмірність Каплана-Йоркі для граничних за ентропією точок положення рівноваги двовимірних і більшої розмірності динамічних систем.

Основним результатом цього розділу є доведення наслідків про

рівність розмірності Каплана-Йоркі з теореми про необхідну і достатню умову локальної топологічної та орбітальної топологічної еквівалентності динамічних систем, опис співвідношень розмірності Каплана-Йоркі з іншими розмірностями, її аналіз для граничних за ентропією точок положення рівноваги на площині та більшої розмірності.

Дані результати є необхідними для моделювання динамічних систем з однаковою розмірністю Каплана-Йоркі, в тому числі й при реконструкції системи за часовим рядом.

Результати третього розділу опубліковано в статтях та тезах доповідей [48, 49, 51, 57, 68] і доповідалися на конференціях та наукових семінарах відділу дистанційних методів та перспективних приладів Інституту космічних досліджень НАН Україна та ДКА України, в Інституті математики НАН України, на Всеукраїнських семінарах «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» Київського національного університету імені Тараса Шевченка (факультет комп'ютерних наук та кібернетики).

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗА ЧАСОВИМИ РЯДАМИ

При дослідженні різних нелінійних динамічних систем, зокрема рідинних [26], геомагнітних [68], однією з актуальних задач є проведення аналізу їх властивостей за наявним експериментальним часовим рядом. Цьому питанню присвячується багато робіт, які спрямовані на обчислення спектра експонент Ляпунова [26, 71 - 79]. Однак ми часто не знаємо чи дійсно постійне векторне поле досліджуваної системи, що є важливим при реконструкції динамічних систем, які описуються звичайними диференціальними рівняннями (ЗДР). Також це питання виникає при дослідженні реконструйованої системи за Такенсом на відповідність реальним експериментальним даним [2, 4, 25]. Найменші зміни векторного поля, яке задає диференціальні рівняння, можуть вплинути на зміну властивостей цієї системи [3, 80], таких як особливі точки, стійкість за Ляпуновим, структурна стійкість або робастність. При поширенні таких результатів на реальний процес можливі небажані негативні явища, особливо в задачах прогнозування, управління і т.д. Для побудови більш адекватної моделі необхідне врахування всіх знайдених властивостей динамічної системи в результаті аналізу. Тому розроблення чисельних методів аналізу динамічних систем (наприклад, спектр експонент Ляпунова, розмірність, властивості векторного поля, введеної у другому розділі граничної ентропії) за наявним експериментальним часовим рядом є актуальною задачею, в тому числі виявлення властивостей векторного поля досліджуваної системи за часовим рядом на основі граничної ентропії і потребує подальшого розгляду.

4.1. Оцінювання матриці Якобі за часовим рядом і обчислення експонент Ляпунова

У цьому підрозділі представляється алгоритм оцінювання локальної матриці Якобі за часовим рядом однієї змінної динамічної системи, а також обчислення спектра експонент Ляпунова.

Нехай $\dot{y} = F(y)$ є динамічна система, яка представляється системою диференціальних рівнянь (3.3).

У [26] також наводиться алгоритм оцінювання матриці Якобі за часовим рядом, де орбітальна точка, фактично, вибирається довільно. Пропонується в якості орбітальної точки знаходити таку, яка найчастіше зустрічається у кулі, яка еволюціонує [49].

Нехай $\{y_j\}, j = \overline{1, N}$ позначає дискретний часовий ряд у кожний момент часу з однаковим інтервалом Δt , тобто $y_j = y(t_0 + (j-1)\Delta t)$, $j = \overline{1, N}$, для деякої нелінійної динамічної системи $\dot{y} = F(y)$, права частина якої представляє собою нелінійні вектор-функції, принаймні C^1 класу гладкості, $y \in \mathbb{R}^d$ (також можна вважати динамічну систему на компактному гладкому многовиді M , тобто $y \in M$, оскільки локально динамічна система при $y \in \mathbb{R}^d$ гомеоморфна такій же динамічній системі на компактному гладкому многовиді, тобто при $y \in M$). Передбачається, що векторне поле F не змінює своєї структури, а також кардинальне число вектора $Card(y)$ постійне (кількість змінних постійна).

Розглянемо маленьку кулю з радіусом ξ , центровану від орбітальної точки y_j , таким чином, щоб у середину кулі потрапило найбільше точок, а також знайдемо цю множину точок $\{y_{k_s}\}, s = \overline{1, n}$, укладених у цій кулі, тобто:

$$\{v_y^s\} = \{y_{k_s} - y_j \mid \|y_{k_s} - y_j\| \leq \xi\}, \quad (4.1)$$

де v^s - вектор різниці, визначений у (4.1), а $\|y_{k_s} - y_j\|$ - евклідова норма різниці. Оскільки орбітальна точка y_j центрована, то це забезпечить найбільшу кількість сусідніх точок, які задовольняють умові (4.1). Після еволюції часового інтервалу $\tau = m\Delta t$, орбітальна точка y_j прямує до y_{j+m} , а вектор різниці відображується до наступного (4.2):

$$\{v_z^s\} = \{y_{k_s+m} - y_{j+m} \mid \|y_{k_s} - y_j\| \leq \xi\}. \quad (4.2)$$

Якщо радіус ξ - достатньо маленький для векторів $\{v_y^s\}$ і $\{v_z^s\}$ то це дає хорошу апроксимацію векторів дотичних у просторі дотичних [26, 49], а еволюція $\{v_y^s\}$ до $\{v_z^s\}$ може бути представлена матрицею J_j [26]:

$$v_z^i = J_j v_y^s, \quad (4.3)$$

де J_j - локальна матриця Якобі.

У [78, 81] описується вимога Екмана-Руеля, де радіус кулі ξ має таке співвідношення до діаметра реконструйованого атрактора D_α :

$$\frac{\xi}{D_\alpha} = \rho \ll 1, \quad (4.3)$$

У [81] формулюється вимога щодо розміру вибірки як для оцінки розмірності, так і обчислення експонент Ляпунова. Оцінка темпу дивергенції траєкторій з сусідніми початковими умовами вимагає таке

число сусідів для заданої точки відліку, які повинні знаходитися у кулі радіуса ξ . За Екманом-Руелем ρ має бути не більше 0.1, тобто не більше 10% діаметра реконструйованого атрактора, а кількість кандидатів у сусідні $\Gamma(\xi)$ має бути більше за одиницю: $\Gamma(\xi) \gg 1$, причому $\Gamma(\xi) \approx \text{Const} \xi^D$, $\Gamma(D_\alpha) \approx N_m$, де D - розмірність атрактора (наприклад, розмірність Каплана-Йоркі D_{KY}), N_m - число необхідних точок. Отже

$$\Gamma(\xi) \approx N_m \left(\frac{\xi}{D_\alpha} \right)^D \gg 1, \ln N_m > D \ln(1/\rho).$$

При $\rho = 0.1$, слід обрати $N_m > 10^D$.

Також у [78] зазначається, що розуміння «малої вибірки» зосереджується у функції, яка залежить від розмірності.

Використавши алгоритм найменшої квадратичної похибки, який наведений в [26], можна отримати (4.4):

$$\min_{J_j} S = \min_{J_j} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \left\| v_z^s - J_j v_y^s \right\|^2 \quad (4.4)$$

Позначимо (k, l) як компоненти матриці J_j через $a_{kl}(j)$.

Застосувавши умову екстремуму для (4.4):

$$\frac{\partial S}{\partial a_{kl}(j)} = 0,$$

знайдемо наступні вирази для J_j :

$$J_j V = C, \quad V_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n v_y^k v_y^l, \quad C_{kl} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n v_z^k v_y^l, \quad (4.5)$$

де $V, C \in d \times d$ коваріаційними матрицями, v_y^k та v_z^k є k -компонентами векторів v_y^s та v_z^s , відповідно. У [26] зазначається, якщо $n \geq d$ і відсутня виродженість, то рівняння (4.5) мають розв'язок.

Оцінивши локальну матрицю Якобі, можна обчислити експоненти Ляпунова:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \ln \|J_j e_i^j\|, \quad i = \overline{1, d}, \quad (4.6)$$

де d - розмірність фазового простору, $\{e_i^j\}$ - множина базисних векторів простору дотичних u_j .

За теоремою Такенса, попередньо оцінивши розмірність простору d (наприклад, за допомогою алгоритму Грасбергера-Прокаччі [27]) та часову затримку t_d (наприклад, використавши автокореляційну функцію), можна реконструювати за часовим рядом однієї змінної деякої системи в d -вимірному фазовому просторі: $y_i = [x(i\tau), \dots, x(i\tau + (d-1)t_d)]$.

Реконструкції деяких відомих систем представлені нижче на рис. 4.1 з заданими параметрами. Обрано змінну x кожної системи для реконструкції. Система Лоренца та Ресслера проінтегрована методом Рунге-Кутти 4 порядку в MATLAB.

Сист. Лоренца	Сис. Ресслера	Відображення Ено
$\begin{cases} \dot{x} = 16(y - x), \\ \dot{y} = -xz + 40x - y, \\ \dot{z} = xy - 4z. \end{cases}$ $\tau = 0.05$	$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + 0.2y, \\ \dot{z} = 0.2 + z(x - 5.7). \end{cases}$ $\tau = 1.2$	$\begin{cases} x(i+1) = 1 - 1.4x^2(i) + y(i), \\ y(i+1) = 0.3x(i). \end{cases}$ $\tau = 1.$

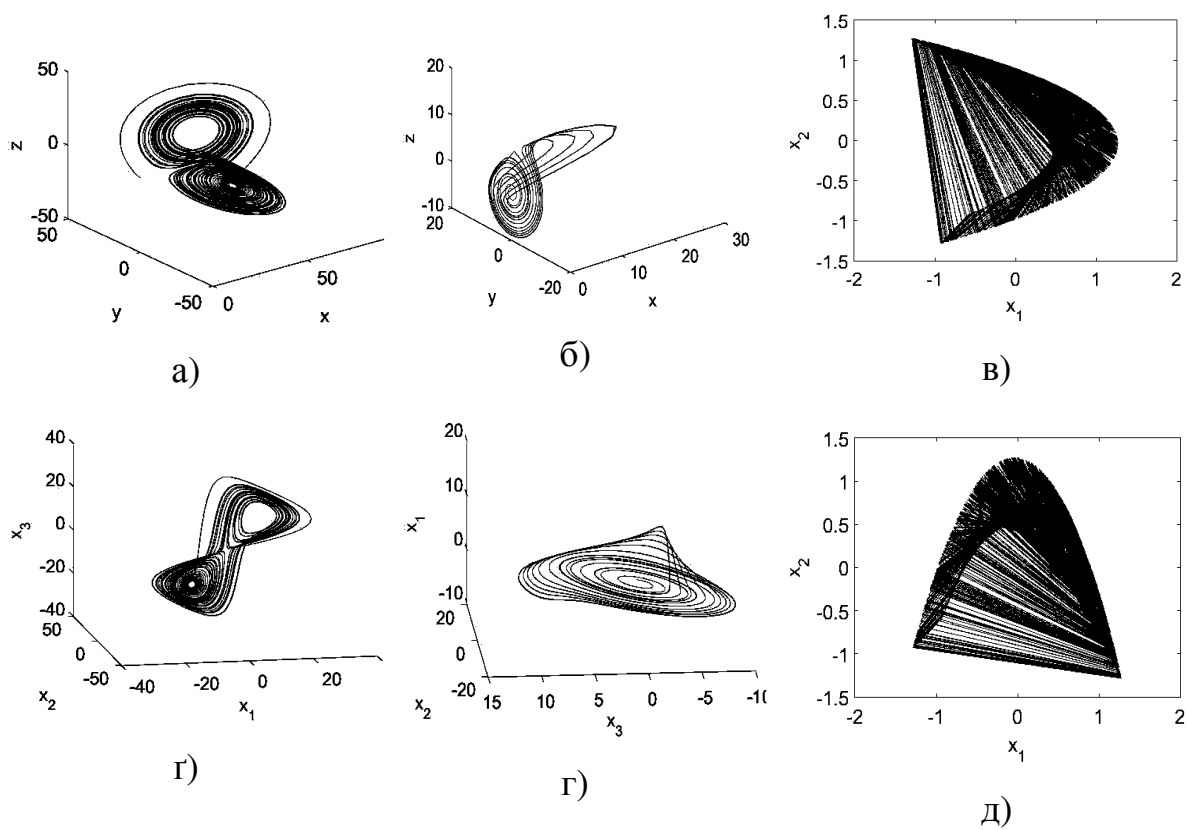


Рис. 4.1. Портрети динамічних систем (а,б,в) і їх реконструкція (г, г, д)

Для повноти викладення, наведемо процес ортогоналізації Грама-Шмідта, який необхідний для обчислення експонент Ляпунова за формулою (4.6).

Ортогоналізація Грама-Шмідта також називається методом реалізації так названої QR декомпозиції.

Деяку матрицю J можна представити як

$$J = QR, \quad (4.7)$$

де Q є ортогональною матрицею

$$Q = [\bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \dots \quad \bar{w}_d] \quad (4.8)$$

та R є верхньо трикутною матрицею

$$R = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1d} \\ 0 & v_{22} & \dots & v_{2d} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{dd} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Однак, представлений спосіб знаходження локальної матриці Якобі за часовим рядом дуже наближений, тож пошук нових підходів і розроблення нових алгоритмів є доволі актуальними задачами в цій області.

4.2. Чисельне диференціювання за часовим рядом

Нехай є часовий ряд лише однієї змінної деякої динамічної системи, яка може бути представлена системою (3.3), у дискретні моменти часу з однаковим інтервалом Δt . Нехай $\{x_j\}$, $j = \overline{1, N}$ позначає такий часовий ряд, тобто $x_j = x(t_0 + (j-1)\Delta t)$, $j = \overline{1, N}$. Необхідно знайти похідну цієї змінної за часом t , ігноруючи шум.

Даній задачі присвячується багато робіт, зокрема [82], однак для аналізу локальних властивостей може бути застосований поліном Тейлора. Отже в околі точки $x(t_0)$ представимо змінну $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + x'(t_0)(x - x(t_0)) + \frac{x''(t_0)}{2!}(x - x(t_0))^2 + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(x - x(t_0))^k. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Тепер позначимо $\frac{x^{(k)}(t_0)}{k!} = C_k$, $k = \overline{0, n}$, у формулі (4.10) та отримаємо:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n C_k (x - x(t_0))^k. \quad (4.11)$$

За допомогою методу найменших квадратів можна оцінити невідомі параметри C_k . Похідна такого полінома за часом представляється формулою (4.12):

$$x'(t) = \sum_{k=1}^n k C_k (x - x(t_0))^{k-1}. \quad (4.12)$$

Отже, таким чином, можна отримати якісну похідну за часом у деякому околі точки $x(t_0)$. Наведений підхід був протестований на змінній x системи Лоренца, представленої вище, одержаної за допомогою чисельного інтегрування методом Рунге-Кутти 4 порядку з інтервалом часу t системи 0.01.

На рис. 4.2 показано чисельне диференціювання за часом дискретної змінної x за допомогою полінома Тейлора (4.12), а також фактичні значення похідної з системи Лоренца та «чисельне диференціювання» за допомогою знаходження різниць $((x_{j+1} - x_j) / \Delta t)$, $j = \overline{1, n-1}$, яке показано пунктирною лінією.

Чим більше членів многочлена (полінома) Тейлора, тим точніший буде результат. Для даного прикладу було обрано 19 членів.

Для обчислення експонент Ляпунова за часовими рядами ключовою задачею є знаходження чисельної локальної матриці Якобі. Чим точніше буде оцінена ця матриця, тим точнішим буде оцінка експонент Ляпунова.

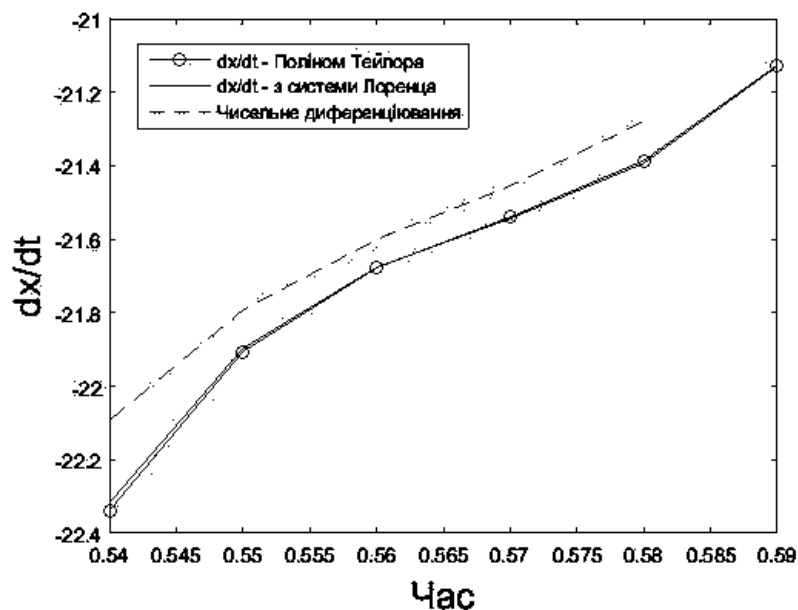


Рис. 4.2. Чисельне диференціювання змінної x системи Лоренца

У [83] зазначається, що найпростіші формули чисельного диференціювання одержуються через диференціювання інтерполяційних формул. Інтерполяційний многочлен Лагранжа також може бути застосований.

Отже представимо

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_k t^k. \quad (4.13)$$

За допомогою методу найменших квадратів також і для цього випадку можна оцінити невідомі параметри C_k . Похідна такого полінома за часом представляється формулою (4.14):

$$x'(t) = \sum_{k=1}^n k C_k t^{k-1}. \quad (4.14)$$

Многочлен (поліном) Лагранжа точно проходить через задані вузли, тому йому надається більша перевага, ніж многочлену Тейлора для даної задачі.

Позначимо систему

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_d), \\ x_2'(t) = \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_d), \\ \dots \\ x_d'(t) = \frac{dx_d}{dt} = f_d(x_1, x_2, \dots, x_d). \end{cases}$$

Нехай $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_d = x_d(t)$. Розглянемо систему складених функцій

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)], \\ \tilde{f}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)], \\ \dots \\ \tilde{f}_d(t) = f_d[x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)]. \end{cases}$$

Похідна кожної із складених функції за часом t системи дорівнює

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{f}_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \frac{dx_d}{dt}, \\ \frac{d\tilde{f}_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_d} \frac{dx_d}{dt}, \\ \dots \\ \frac{d\tilde{f}_d}{dt} = \frac{\partial f_d}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_d}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \frac{dx_d}{dt}. \end{cases} \quad (4.15)$$

З рівняння (4.15) видно, що шукані елементи матриці Якобі довільного рядка мають вигляд

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_d}, i = \overline{1, d}$$

а обчислені чисельно за допомогою многочлена Лагранжа

$$\frac{d\tilde{f}_i}{dt}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_d}{dt}, i = \overline{1, d}.$$

Оскільки останні значення є наближеними до точних значень, то доцільно додати деяку складову $o(t)$ (4.16), позначивши елементи матриці Якобі, як невідомі

$$\frac{d\tilde{f}_i}{dt} = C_1^i \frac{dx_1}{dt} + C_2^i \frac{dx_2}{dt} + \dots + C_d^i \frac{dx_d}{dt} + o(t), i = \overline{1, d}, \quad (4.16)$$

де $o(t)$ - похибка, $C_j^i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i = \overline{1, d}, j = \overline{1, d}$.

Знову, за допомогою методу найменших квадратів (4.17) (максимальної правдоподібності або ентропії [84]) можна оцінити невідомі $C_1^i, C_2^i, \dots, C_d^i, i = \overline{1, d}$

$$\min_{C_1^i, C_2^i, \dots, C_d^i} S = \min_{C_1^i, C_2^i, \dots, C_d^i} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \left\| \frac{d\tilde{f}_i^s}{dt} - C_1^i \frac{dx_1^s}{dt} + C_2^i \frac{dx_2^s}{dt} + \dots + C_d^i \frac{dx_d^s}{dt} \right\|^2. \quad (4.17)$$

Якщо точки розташовані доволі близько (у кулі з доволі малим

радіусом ξ , сутність «малого» була описана вище) і відсутніми виродженими випадками, то єдиний розв'язок для невідомих $C_1^i, C_2^i, \dots, C_d^i$, $i = \overline{1, d}$ можна знайти за допомогою розв'язку наступної системи (4.18) лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{F}_k = C^I \tilde{X}_k, \quad k = \overline{1, d}, \quad (4.18)$$

де \tilde{F}_k - вектор-стовпець з d елементів $\frac{d\tilde{f}_i}{dt}$, $i = \overline{1, d}$, C^I - вектор-строка $[C_1^i, C_2^i, \dots, C_d^i]$, \tilde{X}_k - $d \times d$ матриця, складена з векторів $\frac{dx_i}{dt}$, $i = \overline{1, d}$, з d елементів кожний. При покращенні наближення для похідних $\frac{d\tilde{f}_i}{dt}$ і $\frac{dx_i}{dt}$, $i = \overline{1, d}$, можна отримати достатньо точні значення елементів матриці Якобі.

Отже, повторивши ці обчислення для кожної змінної, можна знайти всі елементи локальної матриці Якобі в околі деякої точки [85]. Цей окіл точки можна задати за допомогою маленької кулі з радіусом ξ , яка була описана вище. Результати тестування алгоритму на прикладі системи Лоренца представлено на рис. 4.3 та в табл. 4.2.

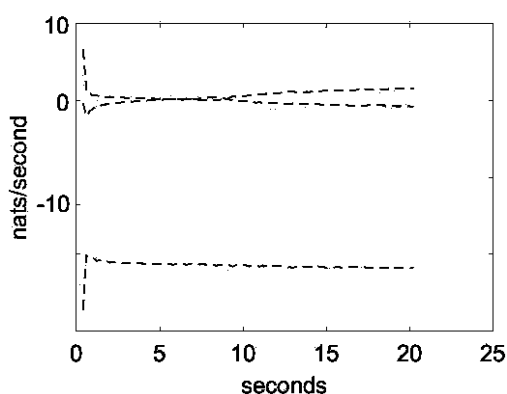


Рис. 4.3. Тестування алгоритму на прикладі часового ряду системи Лоренца (рис. 4.1) $\lambda \approx \{1.5; -0.7; -15.7\}$

Результати розрахунків експонент Ляпунова, декомпозиційних границь, ляпуновської розмірності та Грасбергера-Прокаччі, ентропії Колмогорова, горизонту прогнозу для геомагнітних індексів представлено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1. Чисельні розрахункові границі для геомагнітних індексів, D_{GP} – розмірність за Грасбергером-Прокаччі, D_{KY} – розмірність Каплана-Йоркі, K – ентропія Колмогорова, T – горизонт прогнозу (за період 07.2008 – 04.2013)

Назва	Найбільша границя l_D	Спектр декомпозиційних границь l_i	Спектр Ляпунова λ_i	Кореляційна (фрактальна) розмірність
Кр індекс	2.11	-1.77 -1.91 -2.04 -2.09 -2.17 -2.29 -2.53 -3.38	0.34 0.2 0.07 0.02 -0.06 -0.18 -0.42 -1.27	$D_{GP}=5.92$ $D_{KY}=6.94$ $K=0.64$ $T=3$
DST індекс	1.91	-1.38 -1.72 -1.88 -2.03 -2.31 -3.25	0.53 0.20 0.03 -0.12 -0.40 -1.34	$D_{GP}=3.58$ $D_{KY}=5.18$ $K=0.76$ $T=2$
AE індекс	2.40	-2.05 -2.17 -2.27 -2.33 -2.39 -2.44 -2.50 -2.62 -2.92 -3.82	0.35 0.23 0.13 0.07 0.01 -0.04 -0.10 -0.22 -0.52 -1.42	$D_{GP}=6.36$ $D_{KY}=8.88$ $K=0.79$ $T=3$

Обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом має значне прикладне застосування не тільки для аналізу геомагнітних індексів, а й в обробці даних в супутниковому гравіметрі [86-91] та інших областях наукових досліджень.

Таблиця 4.2. Порівняння результатів розрахунку на прикладі системи Лоренца

Система	Експоненти Ляпунова (за системою рівнянь)	Експоненти Ляпунова (за часовим рядом однієї змінної)
$\begin{cases} \dot{x} = 16(y - x), \\ \dot{y} = -xz + 40x - y, \\ \dot{z} = xy - 4z. \end{cases}$	1.24 0.00 -22.24	1.59 -0.79 -15.79 $\tau = 0.1; N=3000;$ $\xi = 0.6$, не менше 8 точок у кулі з радіусом ξ .

4.3. Виявлення змінювання векторного поля динамічної системи за часовим рядом

4.3.1. Постановка задачі. Нехай M - компактний гладкий многовид розмірності m . Динамічною системою на цьому многовиді M є дифеоморфізм $\varphi: M \rightarrow M$ для дискретного часу $t \in N$, або векторне поле f на M з неперервним часом $t \in \mathbb{R}$ [32]. Многовид M локально гомеоморфний деякій області евклідового простору \mathbb{R}^d , виходячи з означення метричного простору [54].

Для пари (f, y) , де f векторне поле гладкості C^2 і $y = M \rightarrow \mathbb{R}$ - гладка функція на M , існує відображення $F_{(f,y)}: M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ (Теорема 2, Ф. Такенс) [32].

Розглянемо деяку автономну динамічну систему ЗДР, яка є реконструкцією, а $t \in \mathbb{R}: \dot{x} = f(x)$, де f - визначена в області $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, f і $\frac{df}{dt}$ - неперервні в G , а x є вектором. А також припустимо, що система має нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$. Накладені обмеження гарантують існування і єдиність розв'язку $x(t)$, як задачі Коші, при будь-яких

початкових умовах. Нехай f є поліноміальна вектор-функція гладкості C^2 .

Цю систему можна розкласти в ряд Маклорена в деякому околі початку координат та записати:

$$\dot{x} = Jx + V(x), \quad (4.19)$$

де $J = df/dx|_{x=x_0}$ - матриця Якобі для f , а складові $V(x)$ - описують члени від другого і більш високого порядку малості. Еволюція дотичного вектора r в просторі дотичних на $x(t)$ представляється лінеаризацією рівняння (4.19):

$$\dot{r} = Jr. \quad (4.20)$$

Середній експоненціальний темп дивергенції (конвергенції) дотичного вектора r визначається експонентами Ляпунова, відповідно до (4.20), визначеними за наступною формулою (4.21):

$$\lambda(x_0, r(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|}, \quad (4.21)$$

де $\|r(t)\|$ і $\|r(0)\|$ позначають норму Ріманової метрики. Однак, виходячи з вищесказаного, ми можемо використати Евклідову норму. Тому розглянемо наступні траєкторії в d - вимірному фазовому просторі, почавши з двох сусідніх початкових умов x_0 та $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, які еволюціонують у часі за наступними векторами $x(t)$ та $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$ з Евклідовою нормою $\|r(t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Відмітимо, що є d - вимірний базис $\{e_i\}$ для $r(0)$, тоді $\lambda_i(x_0) = \lambda(x_0, e_i)$, $i = \overline{1, d}$.

Для виявлення локальної постійності або змінності векторного поля досліджуваної системи можна використовувати локальні експоненти Ляпунова, обчислені за часовим рядом, за методом, який представлений в [26], однак тоді необхідно аналізувати кожний з λ_i , $i = \overline{1, d}$.

Але, якщо розглянути вектор $p'_i = \frac{\|r_i(t)\|}{\sum_{i=1}^d \|r_i(t)\|}$, $i = \overline{1, d}$, і представити

$\|r_i(t)\| = p'_i \sum_{i=1}^d \|r_i(t)\|$, тоді пропонується зробити декомпозицію експонент Ляпунова [51], де з'явиться комплексний показник для локального дослідження векторного поля.

Ставиться задача опису такого критерію виявлення локальної постійності або змінності векторного поля, як одного з декомпозиційних границь, а також впорядкування цих границь і лінійності.

4.3.2. Декомпозиція експонент Ляпунова.

Лема 4.1. Сума границь: $l_D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)}$ і $l_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0}$, $i = \overline{1, d}$,

тобто $\lambda_i = l_D + l_i$, $i = \overline{1, d}$, є спектром експонент Ляпунова [92].

Доведення.

За означенням, характеристичні експоненти Ляпунова, представляються формулою (4.18) і представляють собою границі.

Отже, за означенням границі $\forall \delta > 0$, $\exists N = N(\delta)$,

$$\forall t > N : \left| \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|r(t)\|}{\|r(0)\|} \right) - \lambda \right| < \delta.$$

Тому

$$\forall \frac{\delta}{2} > 0, \exists N_1 = N_1\left(\frac{\delta}{2}\right), \forall t > N_1 : \left| \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} - l_D \right| < \frac{\delta}{2};$$

$$\forall \frac{\delta}{2} > 0, \exists N_2 = N_2\left(\frac{\delta}{2}\right), \forall t > N_2 : \left| \frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0} - l_i \right| < \frac{\delta}{2}, i = \overline{1, d}.$$

Таким чином,

$$\left| \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} + \frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0} \right) - (l_D + l_i) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} - l_D \right) + \left(\frac{1}{t} \ln \frac{p_i^t}{p_i^0} - l_i \right) \right| < \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \right) = \delta.$$

За $N(\delta)$ оберемо $\max\{N_1; N_2\}$, і отримаємо: $\lambda_i = l_D + l_i, i = \overline{1, d}$ [92].

Примітка 4.1. При використанні Евклідової норми, $\text{Re } \lambda_i = l_D + l_i, i = \overline{1, d}$.

Величина l_D є комплексним показником для дослідження зміни векторного поля.

Величина l_D є найбільшою серед декомпозиційних границь й існує наступне впорядкування: $l_D \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_d$ [92].

Доведення.

Оскільки $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{r_i(t)}{r_i(0)}$ (так як логарифмічна функція

монотонно зростає), $i = \overline{1, d}$, то $l_D \geq \lambda_i$, $i = \overline{1, d}$, $\lambda_i - l_D \leq 0$, $\Rightarrow \lambda_i - l_D = l_i \leq 0$.

Так як $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, існує впорядкування $l_D \geq l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_d$ [92].

Лема 4.2. Якщо $l_D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} =$

$$= \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)}, \quad \forall t > N_1, \quad \text{то система є лінійною з постійними}$$

параметрами [92].

Доведення.

За означенням лінійної системи з постійними параметрами: матриця Якобі $J^t \rightarrow const$. При наступній декомпозиції Грама-Шмідта: $J^t = Q^t R^t$, де R^t - верхньо-трикутна матриця $\Rightarrow R^t(i, i) \rightarrow const$, а тому $\sum_i R^t(i, i) = \sum_i r_i(t) \rightarrow const$, $i = \overline{1, d}$.

Тому: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)} = \ln \frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)}$. Таким чином, для лінійної системи

з постійними параметрами, вираз $\frac{\sum_{i=1}^d r_i(t)}{\sum_{i=1}^d r_i(0)}$ є постійним для кожного

моменту t [92].

4.3.3. Обчислення декомпозиційних границь за часовим рядом.

Алгоритм оцінювання матриці Якобі за часовим рядом був представлений

в багатьох роботах, зокрема в [26]. В [74] був представлений також алгоритм реортонормалізації Грама-Шмідта, за яким розкладається матриця на ортогональну Q і верхньо-трикутну R

$$J = QR.$$

Тоді найбільша декомпозиційна границя може бути обчислена за наступною формулою:

$$l_D = \frac{1}{N\tau} \sum_{k=1}^N \ln \sum_{i=1}^d R^k(i, i), \quad (4.22)$$

де τ - кількість точок, обраних для оцінювання матриці Якобі за 1 ітерацію, а N - відповідно кількість цих ітерацій [92].

Однак при дослідженні часового ряду, невідома розмірність фазового простору досліджуваної системи d . Але за допомогою алгоритму Грасбергера-Прокаччі отримаємо оцінку розмірності d , попередньо визначивши часову затримку t_d (наприклад, використавши автокореляційну функцію). Тоді відповідно до теореми Такенса можна реконструювати за часовим рядом однієї змінної деякої системи: $y_i = [x(i\tau), \dots, x(i\tau + (d-1)t_d)]$ і обчислити (4.22).

Для знаходження часу зміни структури системи, пропонується показник l_D [92], який має комплексну інформацію про її структуру. Наприклад, у системі Лоренца передбачимо зміну одного з параметрів $\beta = 4$ при $t \leq 1000$, $\beta = 8$, при $t > 1000$ секунд. На рис. 4.4 показано чисельні розрахунки показника l_D для системи Лоренца (ліворуч) та геомагнітних індексів (праворуч), за яким можна знаходити приблизний час зміни структури.

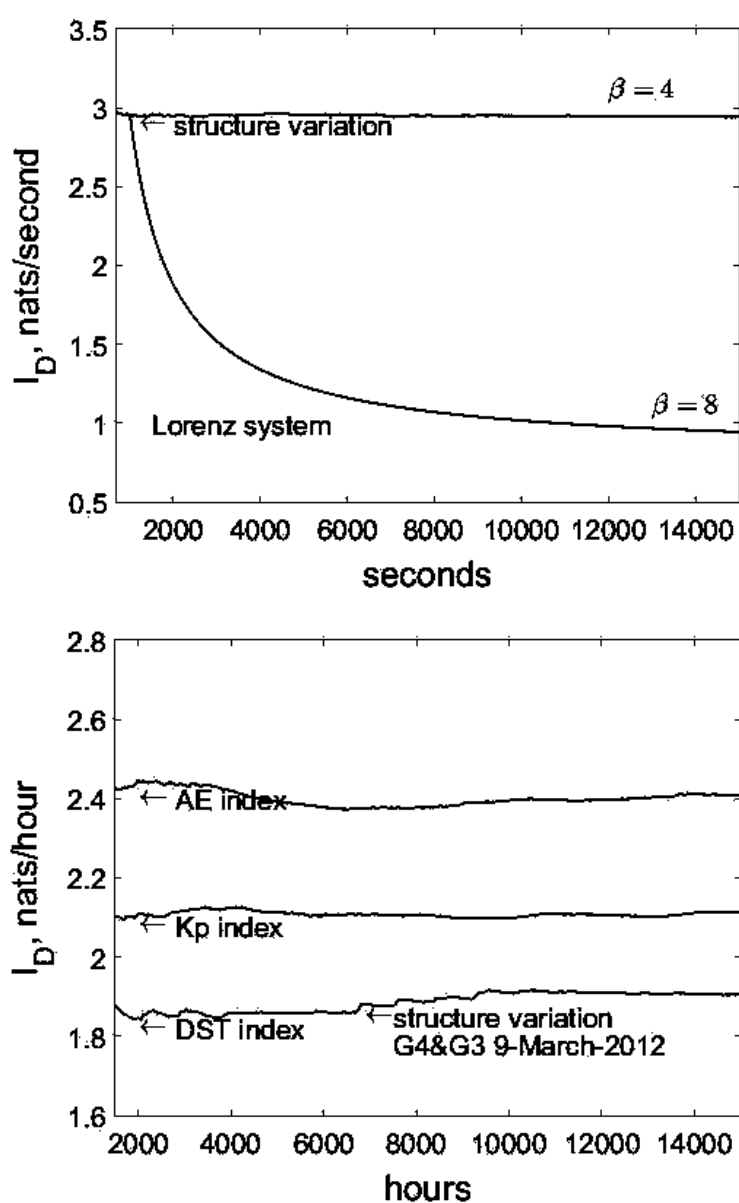


Рис. 4.4. Знаходження часу зміни структури системи Лоренца та геомагнітних індексів

4.4. Обчислення розмірності Каплана-Йоркі на прикладі геомагнітних індексів

Серед багатьох проблем космічної погоди особливу й найважливішу роль займає проведення аналізу за даними спостережень, знаходження

динамічних властивостей, моделювання і прогнозування для попередження її проявів у магнітосфері, іоносфері та атмосфері, яка може вплинути на продуктивність і надійність не тільки космічних, але й наземних технологічних систем, а також на біологічні системи [93]. Виділяють наступні негативні впливи сонячної плазми на техногенні системи: вплив космічної радіації на апаратуру космічних апаратів, радіаційна загроза для космонавтів та екіпажів висотних літаків; зміни в умовах розповсюдження радіохвиль, перешкод у системах зв'язку й навігації, що утворюються іоносферою; зміна орбіт супутників через нагрівання верхніх шарів атмосфери; виникнення геоіндуктивних токів у лініях електропередач, зв'язку та ін.; модифікація хімічного складу та властивостей атмосфери; вплив на біологічні об'єкти та людину [93]. Коли викид корональної плазми наближається до Землі, електрони в полярних районах магнітосфери створюють геомагнітний індукційний струм, який тече вздовж овалу полярних сьйв та може призводити до пошкодження трансформаторів й виключення систем енергопостачання [94]. Саме швидкі викиди корональної плазми є основною причиною великих геомагнітних бур і, отже, є одним з найбільш важливих сонячних явищ. Вплив космічної погоди на навколоземний простір характеризується геомагнітними індексами, які обчислюють за результатами вимірювань. Вони характеризують лише частину складної картини сонячно-земних зв'язків. Одним з таких індексів є Кр індекс. Кр індекс (р означає «planetary», планетарний) показує відхилення магнітного поля від нормального його стану. Область значень Кр від 0 до 9. Цей індекс розраховується як середнє значення К індексів, визначених на 13 геомагнітних обсерваторіях, які знаходяться між 44 і 60 градусами північної та південної геомагнітних широт. Кр індекс є одним з важливих показників космічної погоди. DST індекс (Disturbance storm) характеризує величину кільцевого тороїдального струму під час геомагнітних бур. АЕ

індекс використовується для характеризування збурення магнітного поля на високих полярних широтах.

Тому проведення аналізу часових рядів геомагнітних індексів є важливим для подальшого моделювання, структурно-параметричної ідентифікації за допомогою штучних нейронних мереж [95-96], регресійних моделей, NARMAX [97-98] та білінійних моделі [99], до яких останнім часом спостерігається інтерес [68].

Розглянемо приклад, коли векторне поле системи невідоме, а є лише часовий ряд однієї змінної цієї системи. Нехай ця система може бути представлена системою звичайних диференціальних рівнянь.

Пропонується застосувати алгоритм обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом, описаним вище, а також розрахувати ляпуновську розмірність. Для оцінювання розмірності фазового простору використаємо кореляційну розмірність Грасбергера-Прокаччі. У найближчій точці насичення кореляційної розмірності можна знайти розмірність фазового простору.

Часові ряди геомагнітних індексів Kp, Dst та AE беруться в базі даних OMNI2 [100] (за період 07.2008 – 05.2016).

Передбачається, що шумові ефекти зведені до мінімуму, тому можливий шум ігнорується. Результати розрахунків, які наводяться нижче, виконані в середовищі Matlab 2015.

Для даних часових рядів кореляційна розмірність Kp, Dst та AE індексів оцінена в 6.01, 4.08 та 6.39, відповідно, а розмірність фазового простору дорівнює 8, 6 і 10, відповідно (рис. 4.5). Підтверджується нерівність $D_{GP} < D_L$ (рис. 4.6), де D_{GP} - кореляційна розмірність Грасбергера-Прокаччі [101].

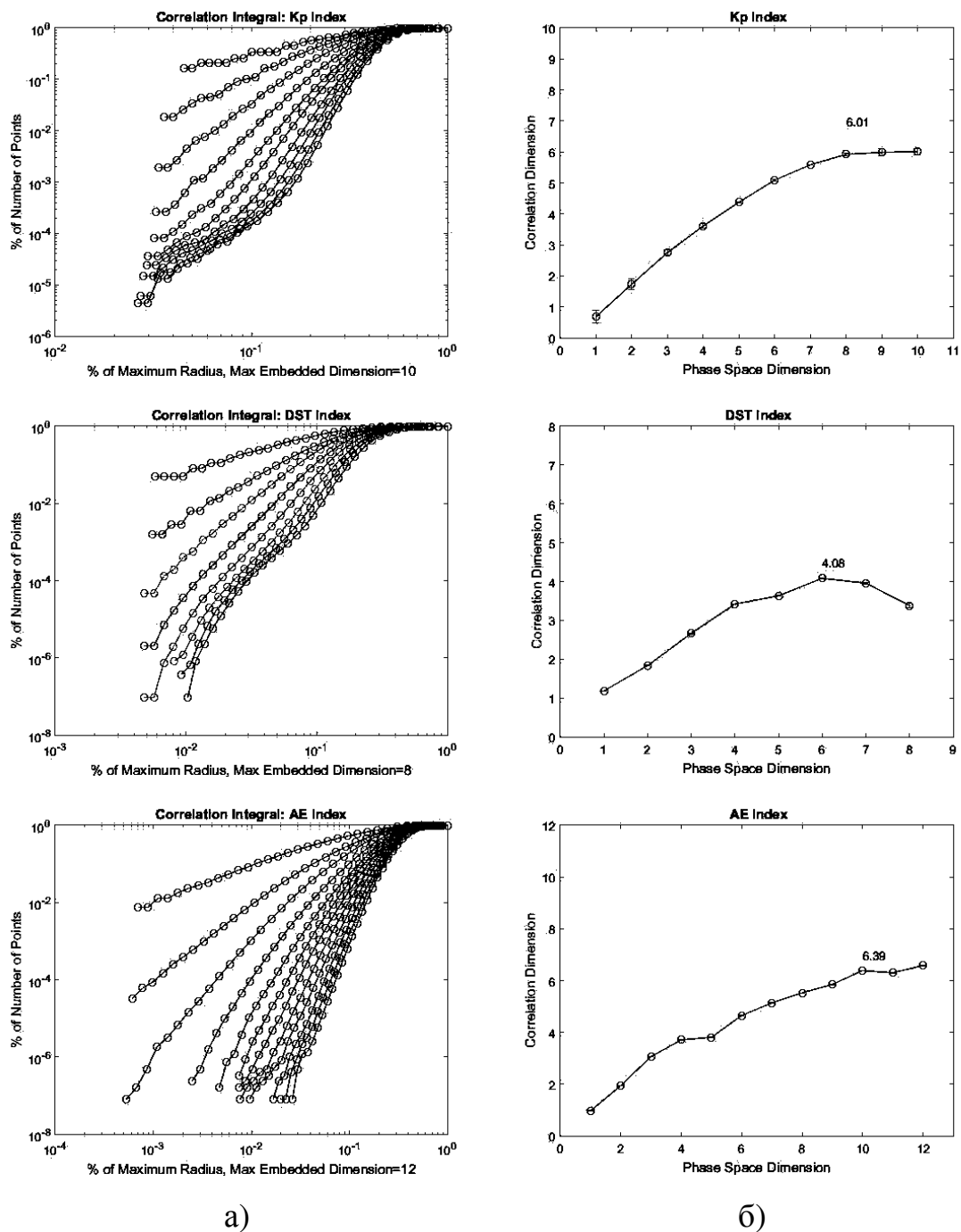


Рис. 4.5. Кореляційна розмірність для геомагнітних індексів:

а) кореляційні інтеграли (Kp, Dst і AE індексів);

б) оцінювання розмірності фазового простору Kp, Dst і AE індексів

На рис. 4.6 відмічається ентропія Колмогорова (K) як сума невід'ємних показників Ляпунова, оцінених за алгоритмом, представленим вище.

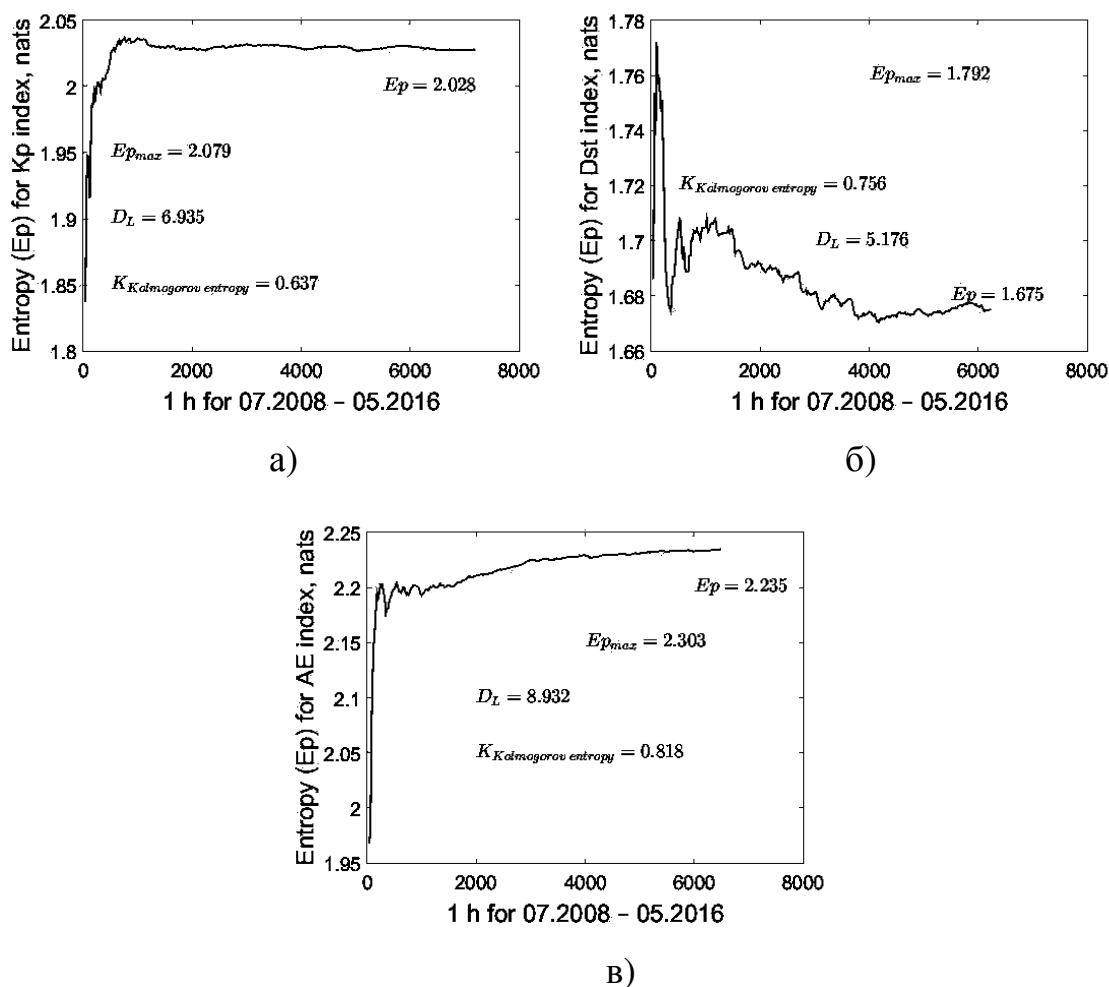


Рис. 4.6. Розмірність за Ляпуновим (Каплана-Йоркі) та ентропія $\overline{E_p}$

для часових рядів геомагнітних індексів (Kp, Dst и AE):

а) Kp індекс; б) Dst індекс; в) AE індекс

Оцінена ентропія $\overline{E_p}$ близька до максимального значення для всіх розглянутих індексів за період з липня 2008 до травня 2016 р., тобто для Kp індексу: $\overline{E_{p_{max}}} = \ln(8) \approx 2.079$, Dst індексу: $\overline{E_{p_{max}}} = \ln(6) \approx 1.792$, AE індексу: $\overline{E_{p_{max}}} = \ln(10) \approx 2.303$.

Як зазначено у 2 розділі, якщо ентропія максимальна, то в околі точки положення рівноваги наявний нелінійний багатовимірний вироджений стійкий або нестійкий вузол. У іншому випадку, тобто коли ентропія менше максимальної, такий фазовий портрет неможливий. Отже, врахувавши можливу зміну структури системи геомагнітних індексів, зростання ентропії до максимальної задає напрямок на можливу зміну типу фазового портрету.

За методом Вольфа та ін. [71] був розрахований старший експонент Ляпунова (біт/год) для Dst індексу, наведений вище (рис. 4.7). Значення показника є додатним, що підтверджує додатність ентропії Колмогорова та вищенаведених розрахунків на основі запропонованого методу.

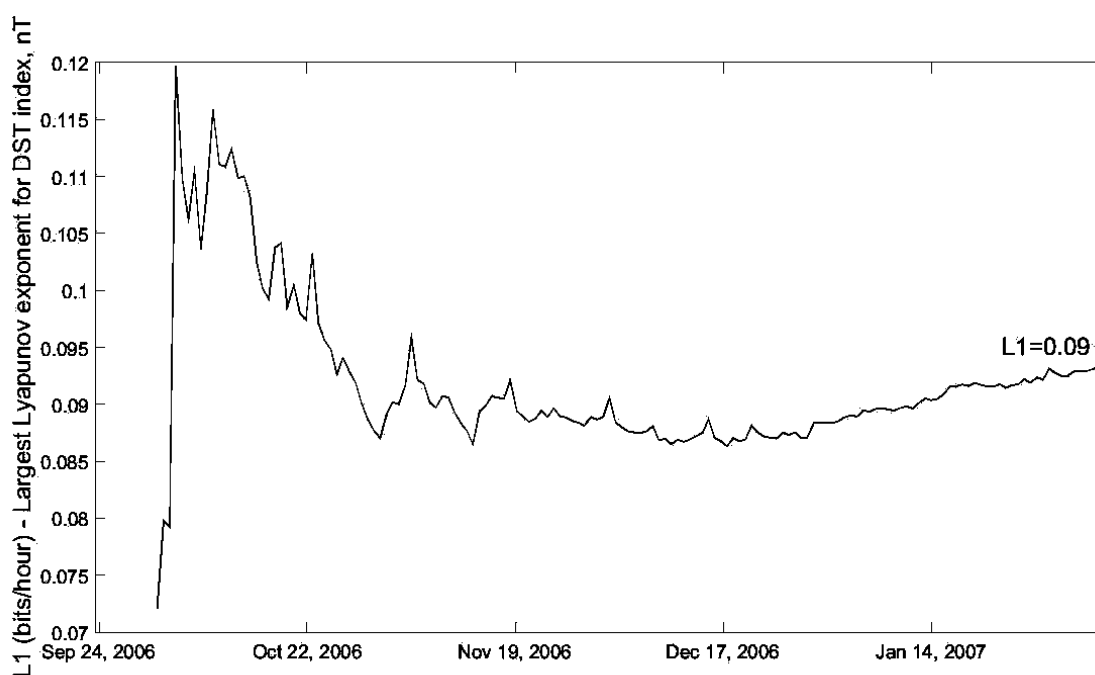


Рис. 4.7. Старший експонент Ляпунова (Dst індекс)

Дослідження динаміки геомагнітних індексів є одним з важливих напрямків. Відслідковування будь-яких змін навіть в околі точки положення рівноваги дає можливість проводити моніторинг зміни структури, а також проводити моделювання і уточнення моделей

прогнозування геомагнітних індексів. Застосування розроблених методів можливе не тільки для автономних систем, а і систем керування, зокрема білінійних систем керування, які дуже поширені при прогнозуванні космічної погоди. Дослідження робастності (грубості) як реконструйованої системи, так і орбітально топологічну еквівалентність нової системи та попередньої має важливе значення. Необхідність у проведенні такого аналізу з'являється при змінювання динамічних характеристик, зокрема експонент Ляпунова, розмірності та ін.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі розглядається алгоритм оцінювання експонент Ляпунова за часовим рядом, в якому особлива увага зосереджується в обчисленні локальної матриці Якобі за допомогою чисельного диференціювання. За допомогою многочленів Тейлора або Лагранжа можна отримати якісне наближене значення першої та другої похідної за часовим рядом. Виведена формула (4.15) та її застосування для даного алгоритму є новим і подібні результати невідомі. Описаний спосіб знаходження похідної за часовим рядом не призводить до зменшення вибірки та у порівнянні з алгоритмом Сано-Савада є більш точнішим при обчисленні локальної матриці Якобі, а отже і експонент Ляпунова та інших показників.

Однак, це не вичерпує проведення досліджень у даному напрямку, бо отримані значення матриці Якобі (на прикладі системи Лоренца) лише наближені до істинних, а шумові ефекти не розглядаються.

За допомогою представленого алгоритму було проведено обчислення експонент Ляпунова та найбільшої декомпозиційної границі l_D за часовими рядами геомагнітних індексів Dst, Kp та AE. Доведено

впорядкованість всіх границь, знайдених при декомпозиції експонент Ляпунова. Наведено пояснення щодо застосування найбільшої границі l_D для дослідження можливого змінювання векторного поля динамічної системи, яка описується звичайними диференціальними рівняннями. Проведено обчислення границі l_D для геомагнітних індексів і системи Лоренца, в якій була передбачена невелика зміна параметра, що впливає на зміну матриці Якобі, а також встановлено, що за цим показником можна встановити приблизний час зміни структури. На прикладі геомагнітних індексів було показано, що сонячні бурі можуть призводити до зміни структури системи. Попередньо знайшовши час зміни структури, можна встановити, що в цей же час відбувалася сонячна буря G3 і G4.

Сума декомпозиційних границь є спектром експонент Ляпунова, про що доведено відповідну лему 4.1. Доведено лему 4.2, яка встановлює умову лінійності системи, яку можна використати при аналізі системи за часовим рядом.

Наступним важливим показником, який впливає на розмірність, є ентропія (означення наведене у 2 розділі) та розмірність Каплана-Йоркі, обчислення яких також були представлені для геомагнітних індексів. Обчислена ентропія для геомагнітних індексів близька до максимального значення. Як зазначено у 2 розділі, якщо ентропія максимальна, то в околі точки наявний нелінійний вироджений стійкий або нестійкий вузол. У іншому випадку, тобто коли ентропія менше максимальної, такий фазовий портрет неможливий. Отже, врахувавши можливу зміну структури системи геомагнітних індексів, зростання ентропії задає напрямок на можливу зміну фазового портрету.

Результати четвертого розділу опубліковано в статтях та тезах доповідей [84-92, 96-98, 101] і доповідалися на конференціях та наукових семінарах відділу дистанційних методів та перспективних приладів Інституту космічних досліджень НАН Україна та ДКА України, в Інституті

математики НАН України, на Всеукраїнських семінарах «Моделювання та оптимізація систем з неповними даними» Київського національного університету імені Тараса Шевченка (факультет комп'ютерних наук та кібернетики).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримані нові науково обґрунтовані результати дослідження локальних властивостей динаміки автономних динамічних систем на компактному гладкому многовиді. Отримано умови локальної дифеоморфності та умови рівності розмірності Каплана-Йоркі; досліджено ентропію нормованого вектора евклідових норм дотичних векторів та застосування декомпозиції експонент Ляпунова для знаходження наближеного часу зміни структури системи. Запропоновано метод обчислення експонент Ляпунова за часовим рядом, а також проведено аналіз деяких геомагнітних індексів на його основі.

Дисертація є новим дослідженням, присвяченим розробці методів аналізу локальних властивостей динаміки процесів, що описуються автономними нелінійними динамічними системами на компактному гладкому многовиді. У дослідженні набули подальшого розвитку аналіз локальних характеристик автономних систем на основі екстремального функціонала та знаходження умов локальної структурної стійкості негіперболічних автономних систем.

Основні результати полягають в наступному:

- отримано твердження щодо екстремальності ентропії вектора нормованих норм дотичних векторів для автономних систем, для яких виконуються умови Гробмана-Гартмана, та отримано екстремальний функціонал у вигляді лагранжіана;
- сформульовано умови локальної топологічної еквівалентності автономних систем на компактному гладкому многовиді та обґрунтовано рівність розмірності Каплана-Йоркі для дифеоморфних систем;
- запропоновано декомпозицію експонент Ляпунова для дослідження структури векторного поля нелінійних автономних систем;

- удосконалено метод оцінювання локальних експонент Ляпунова за часовими рядами.

Результати роботи були використані в рамках науково-дослідної теми «Prediction of Geospace Radiation Environment and Solar wind parameters» за європейським проектом PROGRESS у рамках програми HORIZON – 2020 GA#637302 та за темою «Розробити моделі фізико-хімічних, гідродинамічних процесів у космічному просторі та методи оброблення супутникових даних» № 0113U003019, яку було затверджено Президією НАН України, а також для Українського центру космічної погоди.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: ВИНТИ, 1985. 304 с.
2. Arnold V.I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. New York: Springer, 2011. pp. 351.
3. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. *Докл. АН СССР*. 1937. № 5. С. 247 – 250.
4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. 400 с.
5. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 304 с.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. 2-е изд., доп. Москва: Наука, 1990. 486 с.
7. Гробман Д. М., Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве. *Матем. сб.* 1962. Том 56(98). № 1. С. 77–94.
8. Минц Р.М. О топологической эквивалентности некоторых состояний равновесия системы 3-х дифференциальных уравнений. *Научные доклады Высшей школы (физ.-мат. науки)*. 1958. № 1. С. 19 – 24.
9. Вайсборд Э. М. Об эквивалентности систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. *Научные доклады Высшей школы (физ.-мат. науки)*. 1958. № 1. С. 37 – 42.
10. Гробман Д. М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений. *ДАН СССР*. 1959. Том 128. № 5. С. 880 – 881.

11. Hartman P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. Vol. 11. № 4. pp. 610 – 620.
12. Hartman P. On the local linearization of differential equation. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1963. Vol. 14. №4. pp. 568 – 573.
13. Гробман Д. М. Топологическая эквивалентность в целом систем дифференциальных уравнений. *Матем. сб.* 1967. Том 73(115). № 4. С. 600 – 609.
14. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1972. 240 с.
15. Ладис Н. Н. Топологическая эквивалентность неавтономных уравнений. *Дифференц. уравнения.* 1977. Том 13. № 5. С. 951 – 953.
16. Mori H. Fractal Dimensions of Chaotic Flows of Autonomous Dissipative Systems. *Prog. Theor. Phys.* 1980. Vol. 63. Issue 3. pp. 1044–1047. doi: <https://doi.org/10.1143/PTP.63.1044>
17. Farmer J.D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional system. *Physica D: Nonlinear phenomena.* 1982. Vol. 4. Issue 3. pp. 366 – 393. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(82\)90042-2](https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90042-2)
18. Kaplan J., Yorke J. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. *Lecture Notes in Mathematics.* 1979. Vol. 730. pp. 204-227.
19. Froehling H., Crutchfield J.P., Farmer D., Packard N.H., Shaw R. On determining the dimension of chaotic flows. *Physica 3D.* 1981. Vol. 3. Issue 3. pp. 605-617. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(81\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90043-9)
20. Turbulence Seminar: Benard P., Ratiu T. (eds.). Berkeley: Springer, 1977. 158 p.
21. Shaw R. Strange Attractors, Chaotic Behavior, and Information Flow. *Zeitschrift für Naturforschung A.* 1981. 36(1). pp. 80-112. doi: <https://doi.org/10.1515/zna-1981-0115>
22. Fredericson P., Kaplan J.L., Yorke E.D., Yorke J.A. The Liapunov Dimension of Strange Attractors. *Journal of differential equations.* 1983. 49. pp.

185-207. doi: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(83\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0022-0396(83)90011-6)

23. Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors. *Physica D: Nonlinear phenomena*. 1983. Vol. 7. Issue 1-3. pp. 153-180. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90125-2](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90125-2)

24. Мун Ф. Хаотические колебания: Водный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ. Москва: Мир, 1990. 312 с.

25. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва: Ин-т компьют. исслед., 2011. 516 с.

26. Sano M., Sawada Y. Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 55. Issue 10. pp. 1082-1085. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.1082>

27. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. Issue 5. pp. 346 - 349. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.346>

28. Renyi A. On measures of entropy and information. 4th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Prob.: proc. Vol. 1. (Berkeley, 20 June – 30 July 1960). Berkeley, 1961. pp. 547–561.

29. Evans D. J., Cohen E. G. D., Searles D. J., Bonetto F. Note on the Kaplan–Yorke Dimension and Linear Transport Coefficients. *Journal of Statistical Physics*. 2000. Vol. 101. Issue 1-2. pp. 17 – 34.

30. Трубин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наукова думка, 1992. 205 с.

31. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики. М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т.1. 512 с.

32. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. 1981. № 989. pp. 366–381.

33. Лычак М.М. Робастна диссипативность дискретных систем и ее исследование с помощью последовательности множеств функций

Ляпунова. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. №2. С. 13 – 23.

34. Волосов В.В. Робастные алгоритмы эллипсоидального оценивания состояния многомерных нестационарных непрерывных динамических систем. *Пробл. упр. и информатики*. 1999. № 1. С. 38 – 52.

35. Азарсков В. Н., Блохин Л. Н., Житецкий Л. С., КуССуль Н. Н. Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. К.: НАУ, 2004. 500 с.

36. Кунцевич В. М. Синтез оптимального робастного управления линейными объектами при ограниченных возмущениях. *Автомат. и телемех.* 1992. Выпуск 7. С. 178–182.

37. Наконечний О. Г., Шушарін Ю. В., Демиденко С. В. Гарантовані оцінки середнього значення випадкових послідовностей. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*. 2014. Вип. 4. С. 204-205.

38. Кунцевич А. В., Кунцевич В. М. Оценки устойчивых предельных циклов нелинейных дискретных систем. *Пробл. упр. и информатики*. 2012. № 5. С. 5-14.

39. Кунцевич В. М. Управление и идентификация в условиях неопределенности: результаты и нерешенные проблемы. *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. 2007. № 5. С. 34–46.

40. Кунцевич В. М. Робастная стабилизируемость дискретных систем управления. *Пробл. упр. и информатики*. 2004. № 4. С. 17-22.

41. Кунцевич В. М. Синтез робастно-оптимальных адаптивных систем управления нестационарными объектами при ограниченных возмущениях / В. М. Кунцевич // Пробл. упр. и информатики. - 2004. - № 2. - С. 19-31.

42. Кунцевич В. М. Гарантированные оценки для некоторых классов функций, нелинейных по параметрам. *Пробл. упр. и информатики*. 2005. № 3. С. 17-26.

43. Кунцевич В. М. Гарантированное оценивание фазового состояния и параметров линейных динамических систем. *Пробл. упр. и информатики*. 2005. № 5. С. 18 – 25.

44. Кунцевич В. М. Восстановление вектора состояния нелинейных динамических систем. *Пробл. упр. и информатики*. 2007. № 5. С. 5-19.

45. Кунцевич В. М. Гарантированные результаты в задачах параметрической идентификации и оценивания вектора состояния (фильтрации) при медленно изменяющихся ограниченных помехах измерений. *Пробл. упр. и информатики*. 2006. № 4. С. 50-57.

46. Кунцевич В. М. Робастная устойчивость и синтез дискретных систем управления нелинейными объектами. *Пробл. упр. и информатики*. 2007. № 4. С. 5-22.

47. Яценко В. А., Черемных О. К., Кунцевич В. М., Семенов О. В. Идентификация моделей геомагнитной активности и прогнозирование космической погоды. *Пробл. упр. и информатики*. 2009. № 6. С. 114-124.

48. Иванов С. М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2017. №. 4. С. 83-86.

49. Иванов С. Н., Яценко В. А. Вычисление размерности по Ляпунову и применение для прогнозирования геомагнитных индексов. *Міжнар. наук.-техніч. жур. «Системні дослідження та інформаційні технології»*. 2018. №3. С.122-132. doi: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.11>

50. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 258 с.

51. Иванов С.М. Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем. *Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf.* (Kyiv, 24-26 May 2017). Kyiv, 2017. P. 87.

52. Janes E. T. Information theory and statistical mechanics. *Th. Physical Rev.* 1957. Vol. 106. No. 4. pp. 620 – 630.

53. Presse S., Ghosh K., Lee J., Dill K. A. Principles of maximum entropy and maximum caliber in statistical physics. *Rev. of Mod. Phys.* 2013. Vol. 85. pp. 1115 – 1141.

54. Андреев Г.Н. Тензорное исчисление: учебное пособие. Москва: МГИУ, 2008. 184 с.

55. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва: Ин-т комп. исслед., 2002. 560 с.

56. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1: изд. 2-е, испр. и доп. Москва: ФАЗИС, 1997. 554 с.

57. Іванов С.М., Яценко В.О. Необхідна і достатня умова локальної структурної стійкості динамічних систем на компактному гладкому многовиді. *Dynam. syst. modelling and stab. investig.: inter. conf.*, (Kyiv, 22-24 May 2019). Kyiv, 2019. pp. 89-91.

58. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учеб. пособие. Москва: Финансы и статистика, 2003. 576 с.

59. Чарін В.С. Лінійна алгебра: 2-ге видан, стер. Київ: Техніка, 2005. 416 с.

60. Пиголкина Т.С. Автономные системы. Фазовые траектории. Элементы теории устойчивости: учеб.-методич. пособие. Москва: МФТИ, 2013. 40 с.

61. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1974. 331 с.

62. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления.* 1985. Том 1. С. 7–140.

63. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1987. 304 с.

64. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966.

530 с.

65. Сиренко А., Хусаинов Д. Я. О существовании единой функции Ляпунова для линейных стационарных систем. *Кибернетика*. 2013. 1(13). С. 46 – 51.

66. Шатирко А.В., Хусаинов Д.Я. Оптимізаційні методи дослідження абсолютної стійкості систем регулювання. *Кибернетика*. 2013. 1(13). С. 51-63.

67. Ахмеров Р.Р. Часть II. Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Институт вычислительных технологий СО РАН. URL: http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/ode_unicode/index.html (Дата звернення: 01.11.2018)

68. Іванов С.М., Яценко В.О. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*. 2016. № 3. С. 65-68.

69. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: гос. издат физ.-мат. литер., 1959. 211 с.

70. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.

71. Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Phisica D: Nonlinear phenomena*. 1985. Vol. 16. Issue 3. pp. 285 – 317. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)

72. Qinglan Li, Pengcheng Xu Estimation of Lyapunov spectrum and model selection for a chaotic time series. *Applied Mathematical Modelling*. 2012. 36. pp. 6090 – 6099.

73. Pardalos P. M., Yatsenko V. A. Optimization Approach to the Estimation and Control of Lyapunov Exponents. *Journal of optimization theory*

and applications. 2006. Vol. 128. No. 1. pp. 29–48. doi: <https://doi.org/10.1007/s10957-005-7554-1>

74. Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Ciliberto S. Liapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 34. Issue 6. pp. 4971 – 4979. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.34.4971>

75. Brown R., Bryant P., Abarbanel Henry D.I. Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series. *Phys. Rev. A*. 1991. Vol. 43. Issue 6. pp. 2787 – 2806. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.43.2787>

76. Dieci L., Van Vleck E.S. Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*. 1995. Vol. 17. Issue 3. pp. 275 – 291. doi: [https://doi.org/10.1016/0168-9274\(95\)00033-Q](https://doi.org/10.1016/0168-9274(95)00033-Q)

77. Lai D., Chen G. Statistical analysis of Lyapunov exponents from time series: A Jacobian approach. *Mathem. Comput. Modelling*. 1998. Vol. 27. Issue 7. pp. 1 – 9. doi: [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(98\)00032-6](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(98)00032-6)

78. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*. 1993. Vol. 65. Issue 1–2. pp. 117 – 134. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P)

79. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. et al. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica*. 1980. Vol. 15. Issue 1. pp. 21–30. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>

80. Никульчев Е.В. Геометрический метод реконструкции систем по экспериментальным данным. *Письма в жур. техн. физики*. 2007. Т.33. № 6. С. 83–89.

81. Eckmann J.-P., Ruelle D. Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems. *Physica D*:

Nonlinear Phenomena. 1992. Vol. 56. Issue 2-3. pp. 185 – 187. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90023-G](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90023-G)

82. Górecki T., Łuczak M. Using derivatives in time series classification. *Data Mining and Knowledge Discovery*. 2013. Vol. 26. Issue 2. pp. 310 – 331. doi: <https://doi.org/10.1007/s10618-012-0251-4>

83. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Москва: Наука, 1975. 632 с.

84. Ivanov S.M. Nonlinear discrete models Identification method for geomagnetic indices prediction. *Automation-2017: proc. XXIV inter. conf.* (Kyiv, 13-15 September 2017). Kyiv, 2017. P. 25.

85. Іванов С.М., Яценко В.О. Оцінювання спектру показників Ляпунова за хаотичним часовим рядом з шумом. *Інформаційні технології та взаємодії: праці III міжнар. наук. - практич. конфер.* (Київ, 8 - 10 лист. 2016). Київ, 2016. С. 35.

86. Яценко В.О., Іванов С.М., Макаричев М.В. Аналіз динаміки Кр-індексу для підтримки прийняття рішень з попередження бур. *Теорія прийняття рішень: міжнар. школа-семінар*, (Ужгород, 26 вересня - 1 жовт. 2016). Ужгород, 2016. С. 277 - 278.

87. Макаричев М.В., Іванов С.М., Яценко В.О. Хаотична динаміка керованої ґратки та моделювання показників Ляпунова. *Четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: матер. тез доповідей*. (Київ, 23-25 квітня 2015). Київ, 2015. С. 21.

88. Іванов С.М., Наливайчук М.В., Шолохов О.В., Яценко В.О. Алгоритмічне та математичне забезпечення супутникового адаптивного надпровідного гравіметра. *14-та конференція з космічних досліджень: матер.* (Ужгород, 8 – 12 вересня 2014). Ужгород, 2014. С. 99.

89. Ivanov S.M. Signal processing in cryogenic-optical gravimeter. *GEO-UA: Proc. of the 4rd International Conference*. (Kyiv, 26 – 30 May 2014). Kyiv, 2014. pp. 41-42.

90. Іванов С.М., Макаричев М.В. Адаптивне керування білінійною динамікою чутливої маси надпровідного гравіметра. *15-та українська конференція з космічних досліджень*: матер. (Одеса, 24 – 28 серпня 2015). Одеса, 2015. С. 143.

91. Наливайчук М.В., Тарасенко В.П., Іванов С.М., Яценко В.О. Алгоритмічне та програмне забезпечення адаптивного надпровідного гравіметра. *Комп'ютерно – інтегровані технології: освіта, наука, виробництво*. 2015. № 19. С. 121 – 128.

92. Іванов С.М., Яценко В.О. Виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2018. №. 2. С. 67-70.

93. Akasofu S.I. Predicting Geomagnetic Storms as a Space Weather Project. *COSPAR Colloquia Series: Proceedings of the COSPAR Colloquium*. Vol. 12. (Taipei, 27-29 September 2000). Taipei, 2002. pp. 3–20. doi: [https://doi.org/10.1016/S0964-2749\(02\)80201-3](https://doi.org/10.1016/S0964-2749(02)80201-3)

94. Balikhin M., Bates I., Walker S. N. Identification of Linear and Nonlinear processes in Space Plasma Turbulence. *Advances in Space Research*. 2001. Vol. 28. Issue 5. pp. 787–800. doi: [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(01\)00515-4](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00515-4)

95. Wu J.G., Lundstedt H. Neural network modeling of solar wind magnetosphere interaction. *J.Geophys.Res.* 1997. Vol. 102. Issue A7. pp. 14457–14466. doi: <https://doi.org/10.1029/97JA01081>

96. Ivanov S.M. Comparison of NARMAX, Artificial neural network, and Localized Lyapunov exponents for geomagnetic indices prediction. *Fourth UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science*: abstracts. (Kyiv, 28 August –1 September, 2017). Kyiv, 2017. P. 69.

97. Ivanov S.M. NARMAX network identification and space weather prediction. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*: матер. тез доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 13 – 15 грудня

2017). Київ, 2017. С. 68.

98. Yatsenko V. O., Ivanov S.M., Parnowski A., Vlasov D. Guaranteed NARMAX model for the prediction of geomagnetic Dst index. *Journal of Physical Studies*. 2019. Vol. 23. No. 1. pp. 1901-1 – 1901-5. doi: <https://doi.org/10.30970/jps.23.1901>

99. Yatsenko V. O., Prutsko J. V., Cheremnykh S. O. Geomagnetic Dst-index forecast based on bilinear models and nonlinear filtering techniques. *10-а укр. конф. з косм. дослід.*: abstracts. (Yevpatoria, 2010). Yevpatoria, 2010. P. 108.

100. GSFC/SPDF OMNIWeb. URL: <http://omniweb.gsfc.nasa.gov/> (Дата звернення: 01.06.2016)

101. Ivanov S. The investigating of geomagnetic indices (DST, KP, AE): correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction. 17-th Ukrainian conference on space research: proc. (Odesa, 21-25 August 2017). Odesa, 2017. P. 18.

ДОДАТОК А

Статті у наукових фахових виданнях

1. Іванов С.М., Яценко В.О. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки.* 2016. № 3. С. 65-68.
2. Іванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2017. №. 4. С. 83-86.
3. Іванов С. Н., Яценко В. А. Вычисление размерности по Ляпунову и применение для прогнозирования геомагнитных индексов. *Міжнар. наук.-техніч. жур. «Системні дослідження та інформаційні технології».* 2018. №3. С.122-132. doi: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.11>
4. Іванов С.М., Яценко В.О. Виявлення змінювання векторного поля за часовим рядом. *Вісник Київського національного унів-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2018. №. 2. С. 67-70.
5. Yatsenko V.O., Ivanov S.M., Parnowski A., Vlasov D. Guaranteed NARMAX model for the prediction of geomagnetic Dst index. *Journal of Physical Studies.* 2019. Vol. 23. No. 1. pp. 1901-1 – 1901-5. doi: <https://doi.org/10.30970/jps.23.1901>

Статті в інших наукових виданнях

6. Наливайчук М.В., Тарасенко В.П., Іванов С.М., Яценко В.О. Алгоритмічне та програмне забезпечення адаптивного надпровідного гравіметра. *Комп'ютерно – інтегровані технології: освіта, наука, виробництво.* 2015. № 19. С. 121 – 128.

Тези та матеріали наукових конференцій

7. Ivanov S.M. Signal processing in cryogenic-optical gravimeter. *GEO-UA: Proc. of the 4rd International Conference*. (Kyiv, 26-30 May 2014). Kyiv, 2014. pp. 41-42.

8. Наливайчук М.В., Іванов С.М., Шолохов О.В., Яценко В.О. Алгоритмічне та математичне забезпечення супутникового адаптивного надпровідного гравіметра. *14-та конференція з космічних досліджень: матер.* (Ужгород, 8-12 вересня 2014). Ужгород, 2014. С. 99.

9. Макаричев М.В., Іванов С.М., Яценко В.О. Хаотична динаміка керованої ґратки та моделювання показників Ляпунова. *Четверта Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики: матер. тез доповідей*. (Київ, 23-25 квітня 2015). Київ, 2015. С. 21.

10. Іванов С.М., Макаричев М.В. Адаптивне керування білінійною динамікою чутливої маси надпровідного гравіметра. *15-та українська конференція з космічних досліджень: матер.* (Одеса, 24-28 серпня 2015). Одеса, 2015. С.143.

11. Яценко В.О., Іванов С.М., Макаричев М.В. Аналіз динаміки Кр-індексу для підтримки прийняття рішень з попередження бур. *Теорія прийняття рішень: міжнар. школа-семінар*, (Ужгород, 26 вересня - 1 жовт. 2016). Ужгород, 2016. С. 277 - 278.

12. Іванов С.М., Яценко В.О. Оцінювання спектру показників Ляпунова за хаотичним часовим рядом з шумом. *Інформаційні технології та взаємодії: праці III міжнар. наук. - практич. конфер.* (Київ, 8 - 10 лист. 2016). Київ, 2016. С. 35.

13. Іванов С.М. Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем. *Dynam. syst. model. and stab. investig.: inter. conf.* (Kyiv, 24-26 May 2017). Kyiv, 2017. P. 87.

14. Ivanov S. The investigating of geomagnetic indices (DST, KP, AE): correlation dimension, Lyapunov exponents, and prediction. 17-th Ukrainian conference on space research: proc. (Odesa, 21-25 August 2017). Odesa, 2017. P. 18.
15. Ivanov S.M. Comparison of NARMAX, Artificial neural network, and Localized Lyapunov exponents for geomagnetic indices prediction. *Fourth UK-Ukraine-Spain Meeting on Solar Physics and Space Science*: proc. (Kyiv, 28 August –1 September, 2017). Kyiv, 2017. P. 69.
16. Ivanov S.M. Nonlinear discrete models Identification method for geomagnetic indices prediction. *Automation-2017*: proc. XXIV inter. conf. (Kyiv, 13-15 September 2017). Kyiv, 2017. P. 25.
17. Ivanov S.M. NARMAX network identification and space weather prediction. *Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку*: матер. тез доповідей міжнар. наук. конф. (Київ, 13 – 15 грудня 2017). Київ, 2017. С. 68.
18. Іванов С.М., Яценко В.О. Необхідна і достатня умова локальної структурної стійкості динамічних систем на компактному гладкому многовиді. *Dynam. syst. modelling and stab. investig.*: inter. conf., (Kyiv, 22-24 May 2019). Kyiv, 2019. pp. 89-91.